Les symétries dans les œuvres de Weyl et de Wigner.

Christophe Eckes

Paris VII

12 mai 2011

Introduction

Deux motifs d'une étude comparée des travaux et réflexions de WEYL et WIGNER sur les symétries :

Premier motif : Ils sont parmi les premiers à mathématiser la mécanique quantique en s'appuyant sur la THÉORIE DES GROUPES ET DES REPRÉSENTATIONS DE GROUPES,

qu'il s'agisse de groupes FINIS (par ex. $\mathfrak{S}_n$), ou de groupes DE LIE, i.e. de groupes munis d'une structure de variété lisse (par ex. $\mathrm{SO}(3)$).

Introduction

Deux motifs d'une étude comparée des travaux et réflexions de WEYL et WIGNER sur les symétries :

Premier motif : Ils sont parmi les premiers à mathématiser la mécanique quantique en s'appuyant sur la THÉORIE DES GROUPES ET DES REPRÉSENTATIONS DE GROUPES,

qu'il s'agisse de groupes FINIS (par ex. $\mathfrak{S}_n$), ou de groupes DE LIE, i.e. de groupes munis d'une structure de variété lisse (par ex. SO(3)).

- Ils étendent ce cadre formel à des systèmes quantiques de complexité croissante,
- WEYL l'applique dès 1928 à la mécanique quantique RELATIVISTE fondée par DIRAC en 1927.

Deuxième motif : ce projet alimente les réflexions plus générales de WEYL et WIGNER sur le statut épistémologique et les fonctions des SYMÉTRIES dans diverses théories physiques.

Deuxième motif : ce projet alimente les réflexions plus générales de WEYL et WIGNER sur le statut épistémologique et les fonctions des SYMÉTRIES dans diverses théories physiques.

- ils soulignent la TRANSVERSALITÉ des principes d'invariance ou de symétrie en mathématiques et en physique ;
- ils examinent la distinction entre connaissances A PRIORI et connaissances A POSTERIORI à la lumière du rapport entre PRINCIPES D'INVARIANCE et LOIS DE LA NATURE ;

Deuxième motif : ce projet alimente les réflexions plus générales de WEYL et WIGNER sur le statut épistémologique et les fonctions des SYMÉTRIES dans diverses théories physiques.

- ils soulignent la TRANSVERSALITÉ des principes d'invariance ou de symétrie en mathématiques et en physique ;
- ils examinent la distinction entre connaissances A PRIORI et connaissances A POSTERIORI à la lumière du rapport entre PRINCIPES D'INVARIANCE et LOIS DE LA NATURE ;
- WIGNER propose une classification des « symétries » en usage dans diverses théories physiques ;
- à la suite de SPEISER, WEYL étend ses réflexions sur les symétries aux arts.

Deuxième motif : ce projet alimente les réflexions plus générales de WEYL et WIGNER sur le statut épistémologique et les fonctions des SYMÉTRIES dans diverses théories physiques.

- ils soulignent la TRANSVERSALITÉ des principes d'invariance ou de symétrie en mathématiques et en physique ;
- ils examinent la distinction entre connaissances A PRIORI et connaissances A POSTERIORI à la lumière du rapport entre PRINCIPES D'INVARIANCE et LOIS DE LA NATURE ;
- WIGNER propose une classification des « symétries » en usage dans diverses théories physiques ;
- à la suite de SPEISER, WEYL étend ses réflexions sur les symétries aux arts.

Ces réflexions leur permettent d'adopter une POSITION DE SURPLOMB par rapport à des théories physiques très différentes.

0.1. Clarification conceptuelle sur les principes de symétrie ou d'invariance ; lien avec le Programme d'Erlangen de Klein.

D'un point de vue mathématique, une « symétrie » admet deux composantes :

(1) la possibilité de changements ou transformations,

(2) la préservation de certaines propriétés sous l'action de ces changements ou transformations qui, pris ensemble, forment un GROUPE.

0.1. Clarification conceptuelle sur les principes de symétrie ou d'invariance ; lien avec le Programme d'Erlangen de Klein.

D'un point de vue mathématique, une « symétrie » admet deux composantes :

(1) la possibilité de changements ou transformations,

(2) la préservation de certaines propriétés sous l'action de ces changements ou transformations qui, pris ensemble, forment un GROUPE.

Le concept de symétrie implique une CORRÉLATION entre les notions de changements et de « permanence » dans le changement — permanence n'ayant pas ici une signification nécessairement temporelle. Voilà pourquoi, il est préférable de parler d'INVARIANCE.

Une propriété de symétrie est donc une relation qui reste INALTÉRÉE sous l'action d'un groupe de transformations. Une symétrie n'a pas un sens exclusivement GÉOMÉTRIQUE.

Cette première tentative de définition montre que

(i) les notions de *symétrie* et d'*invariance* se recouvrent,

(ii) le concept mathématique de groupe intervient de manière essentielle pour déterminer des symétries.

Cette première tentative de définition montre que

(i) les notions de *symétrie* et d'*invariance* se recouvrent,

(ii) le concept mathématique de groupe intervient de manière essentielle pour déterminer des symétries.

Il n'y a pas de symétrie DANS L'ABSOLU, mais toujours RELATIVEMENT à un groupe convenablement choisi. Par ex., si E désigne un espace euclidien de dimension n,

Cette première tentative de définition montre que

(i) les notions de *symétrie* et d'*invariance* se recouvrent,

(ii) le concept mathématique de groupe intervient de manière essentielle pour déterminer des symétries.

Il n'y a pas de symétrie DANS L'ABSOLU, mais toujours RELATIVEMENT à un groupe convenablement choisi. Par ex., si E désigne un espace euclidien de dimension n,

- la *distance* entre deux points dans E est préservée sous l'action du groupe $\mathrm{O}(E)$ des isométries — directes ou indirectes — de E.
- en revanche, l'*orientation* dans cet espace n'est invariante que sous l'action du groupe $\mathrm{SO}(E)$ des isométries directes, i.e. des isométries de déterminant 1.

La « relativité » des symétries a été soulignée par E. CASSIRER dans *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (1910).

La « relativité » des symétries a été soulignée par E. CASSIRER dans *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (1910).

- référence au *Programme d'Erlangen* de KLEIN (1872) qui consiste à classer les « géométries » en fonction de leur invariance relativement à certains sous-groupes continus du groupe des homographies $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ agissant sur le plan projectif complexe.
- CASSIRER montre qu'il est impossible de définir des propriétés de symétrie dans l'absolu.

La « relativité » des symétries a été soulignée par E. CASSIRER dans *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (1910).

- référence au *Programme d'Erlangen* de KLEIN (1872) qui consiste à classer les « géométries » en fonction de leur invariance relativement à certains sous-groupes continus du groupe des homographies $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ agissant sur le plan projectif complexe.
- CASSIRER montre qu'il est impossible de définir des propriétés de symétrie dans l'absolu.

« Redéfinie comme théorie de l'invariance, la géométrie traite des relations immuables, mais cette immutabilité n'a de sens qu'en fonction de certains grands schémas de déplacements qui constituent, en quelque sorte, l'arrière-plan formel destiné à en garantir, par contraste, la validité. Invariables, les propriétés géométriques le sont, non en soi, mais toujours par référence à un certain complexe de transformations possibles que nous présupposons implicitement. Constance et variabilité apparaissent alors comme des termes parfaitement corrélatifs, non définissables autrement que l'un par l'autre ».

Dans ses réflexions sur les symétries, WEYL se réfère au PROGRAMME D'ERLANGEN :

- « Relativity as a stimulus in mathematical research », in *50 Jahre Relativitätstheorie* (1949),
- *Symmetry* (1938 / 1951).

Dans ses réflexions sur les symétries, WEYL se réfère au PROGRAMME D'ERLANGEN :

- « Relativity as a stimulus in mathematical research », in *50 Jahre Relativitätstheorie* (1949),
- *Symmetry* (1938 / 1951).

« Une géométrie [au sens de KLEIN] est définie par un groupe de transformations et recherche tout ce qui est invariant pour les transformations de ce groupe. On parlera de symétrie (...) quand on connaîtra un sous-groupe d'un groupe donné ; les sous-groupes finis étant particulièrement intéressants ». [*Symétrie*, p. 130-131.]

Dans ses réflexions sur les symétries, WEYL se réfère au PROGRAMME D'ERLANGEN :

- « Relativity as a stimulus in mathematical research », in *50 Jahre Relativitätstheorie* (1949),
- *Symmetry* (1938 / 1951).

« Une géométrie [au sens de KLEIN] est définie par un groupe de transformations et recherche tout ce qui est invariant pour les transformations de ce groupe. On parlera de symétrie (...) quand on connaîtra un sous-groupe d'un groupe donné ; les sous-groupes finis étant particulièrement intéressants ». [*Symétrie*, p. 130-131.]

- Une GÉOMÉTRIE désigne l'ensemble des relations laissées invariantes par un groupe agissant sur un espace de points donné.
- WEYL évoque les groupes finis à dessein : cf. les sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3)$ qui laissent fixes les polyèdres réguliers inscrits dans la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.
- WEYL fait allusion aux travaux de KLEIN sur l'icosaèdre.

- Weyl fait un parallèle entre le Programme d'Erlangen et la Théorie de Galois algébrique pour expliciter l'importance des symétries en mathématiques.
- Ce parallèle est déjà établi par Klein dans les remarques finales au Programme d'Erlangen.

- Weyl fait un parallèle entre le Programme d'Erlangen et la Théorie de Galois algébrique pour expliciter l'importance des symétries en mathématiques.
- Ce parallèle est déjà établi par Klein dans les remarques finales au Programme d'Erlangen.

(i) en théorie de Galois interviennent des groupes de permutations des racines d'une équation algébrique de degré n, il s'agit de groupes finis. En revanche, le programme d'Erlangen met en jeu des groupes continus de transformations.

(ii) les deux théories sont néanmmoins structurées de la même manière et Klein les juge analogue :

- Weyl fait un parallèle entre le Programme d'Erlangen et la Théorie de Galois algébrique pour expliciter l'importance des symétries en mathématiques.
- Ce parallèle est déjà établi par Klein dans les remarques finales au Programme d'Erlangen.

(i) en théorie de Galois interviennent des groupes de permutations des racines d'une équation algébrique de degré n, il s'agit de groupes finis. En revanche, le programme d'Erlangen met en jeu des groupes continus de transformations.

(ii) les deux théories sont néanmmoins structurées de la même manière et Klein les juge analogue :

« Dans la théorie de Galois telle qu'elle est exposée, par exemple, dans le *Traité d'algèbre supérieure* de Serret ou dans le *Traité des substitutions* de C. Jordan, ce qui fait proprement l'objet des recherches, c'est la théorie même des groupes ou des substitutions ; la théorie des équations en découle comme application. Par analogie, nous voudrions une *théorie des transformations*, une théorie des groupes qui peuvent être engendrés par des transformations d'une nature donnée ».

KLEIN relativise la conception de l'algèbre comme « théorie des équations et de leur résolution », encore très présente chez SERRET.

KLEIN relativise la conception de l'algèbre comme « théorie des équations et de leur résolution », encore très présente chez SERRET.

La théorie des groupes ne commence à se développer de manière systématique qu'au cours des années 1860-1870 ; elle devient transversale (i.e. elle n'est plus restreinte à des objets algébriques) avec les travaux de JORDAN, KLEIN et LIE.

KLEIN relativise la conception de l'algèbre comme « théorie des équations et de leur résolution », encore très présente chez SERRET.

La théorie des groupes ne commence à se développer de manière systématique qu'au cours des années 1860-1870 ; elle devient transversale (i.e. elle n'est plus restreinte à des objets algébriques) avec les travaux de JORDAN, KLEIN et LIE.

LIE mesure de proche en proche l'importance de la théorie des groupes continus en géométrie (avec KLEIN entre 1869-1872) et dans la résolution des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles (dès 1872-1874).

KLEIN relativise la conception de l'algèbre comme « théorie des équations et de leur résolution », encore très présente chez SERRET.

La théorie des groupes ne commence à se développer de manière systématique qu'au cours des années 1860-1870 ; elle devient transversale (i.e. elle n'est plus restreinte à des objets algébriques) avec les travaux de JORDAN, KLEIN et LIE.

LIE mesure de proche en proche l'importance de la théorie des groupes continus en géométrie (avec KLEIN entre 1869-1872) et dans la résolution des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles (dès 1872-1874).

- si l'application des groupes discrets à la CRISTALLOGRAPHIE est déjà explicitée par SOHNCKE dans les années 1870,
- en revanche, l'application des groupes de Lie à la physique devient pleinement effective avec la formalisation de la RELATIVITÉ RESTREINTE (cf. KLEIN, 1910, HERGLOTZ, 1911).

- Weyl se situe dans une tradition kleinéenne en construisant ses réflexions sur les symétries à partir d'une analogie entre le Programme d'Erlangen et la théorie de Galois.
- il met en avant le rôle essentiel des symétries dans les sciences exactes en se référant à deux théories qu'il juge « fondatrices » de modernité en algèbre et en géométrie.

- WEYL se situe dans une tradition kleinéenne en construisant ses réflexions sur les symétries à partir d'une analogie entre le PROGRAMME D'ERLANGEN et la THÉORIE DE GALOIS.
- il met en avant le rôle essentiel des symétries dans les sciences exactes en se référant à deux théories qu'il juge « fondatrices » de modernité en algèbre et en géométrie.

Au début de « Relativity Theory as a Stimulus », WEYL décrit même une situation abstraite qui met en jeu un ensemble d'objets appelés POINTS, des RELATIONS entre ces objets et le GROUPE DES AUTOMORPHISMES de cet ensemblepréservant certaines de ces relations.

- WEYL se situe dans une tradition kleinéenne en construisant ses réflexions sur les symétries à partir d'une analogie entre le PROGRAMME D'ERLANGEN et la THÉORIE DE GALOIS.
- il met en avant le rôle essentiel des symétries dans les sciences exactes en se référant à deux théories qu'il juge « fondatrices » de modernité en algèbre et en géométrie.

Au début de « Relativity Theory as a Stimulus », WEYL décrit même une situation abstraite qui met en jeu un ensemble d'objets appelés POINTS, des RELATIONS entre ces objets et le GROUPE DES AUTOMORPHISMES de cet ensemblepréservant certaines de ces relations.

Le programme d'Erlangen et la théorie de Galois constituent deux réalisations possibles de cette situation abstraite.

Résumé de la théorie de Galois par WEYL pour exhiber le rôle central qu'y jouent les « symétries » :

Résumé de la théorie de Galois par WEYL pour exhiber le rôle central qu'y jouent les « symétries » :

« En théorie de Galois, les « points » sont les n racines α_1, ..., α_n d'une équation algébrique de degré n avec des coefficients rationnels. Les relations objectives sont celles que l'on peut exprimer en termes d'opérations fondamentales d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, i.e. toutes les relations de la forme $F(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$, où $F(x_1, ..., x_n)$ est un polynôme des n variables x_1, ..., x_n à coefficients rationnels (...). Une transformation est une permutation des n racines, un automorphisme est une permutation qui laisse toutes les relations algébriques $F(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$ avec des coefficients rationnels inaltérées ; les automorphismes forment le groupe de Galois ».

0.2. Les « symétries » en physique : court aperçu.

Dans leurs réflexions sur les symétries, WIGNER et WEYL se réfèrent à diverses théories physiques.

0.2. Les « symétries » en physique : court aperçu.

Dans leurs réflexions sur les symétries, WIGNER et WEYL se réfèrent à diverses théories physiques.

Au moment où sont formulés les fondements de la mécanique quantique en 1925-1926, il semble acquis que la théorie des groupes est centrale pour formaliser d'autres théories déjà constituées.

0.2. Les « symétries » en physique : court aperçu.

Dans leurs réflexions sur les symétries, WIGNER et WEYL se réfèrent à diverses théories physiques.

Au moment où sont formulés les fondements de la mécanique quantique en 1925-1926, il semble acquis que la théorie des groupes est centrale pour formaliser d'autres théories déjà constituées.

En cristallographie :

- Classification des 230 « groupes d'espace » par FEDOROV et SCHÖNFLIES fin 1880, début 1890,

0.2. Les « symétries » en physique : court aperçu.

Dans leurs réflexions sur les symétries, Wigner et Weyl se réfèrent à diverses théories physiques.

Au moment où sont formulés les fondements de la mécanique quantique en 1925-1926, il semble acquis que la théorie des groupes est centrale pour formaliser d'autres théories déjà constituées.

En cristallographie :

- Classification des 230 « groupes d'espace » par Fedorov et Schönflies fin 1880, début 1890,
- Speiser se fait l'écho des applications spectaculaires de la théorie des groupes à la cristallographie dans *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (1923).
  - (i) Weyl et Wigner s'empareront de cette référence pour justifier par extension l'importance de la théorie des groupes en mécanique quantique.
  - (ii) Weyl prolongera les réflexions de Speiser sur les symétries en art.

En relativité restreinte :

- introduction du groupe spécial de Lorentz par POINCARÉ et EINSTEIN en 1905,
- réinterprétation du principe de relativité par KLEIN comme *invariance par un groupe de transformations* en 1910,
- déduction des dix lois de conservation de la relativité restreinte à partir des générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré par HERGLOTZ (1911).

En relativité restreinte :

- introduction du groupe spécial de Lorentz par POINCARÉ et EINSTEIN en 1905,
- réinterprétation du principe de relativité par KLEIN comme *invariance par un groupe de transformations* en 1910,
- déduction des dix lois de conservation de la relativité restreinte à partir des générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré par HERGLOTZ (1911).

En 1916, ENGEL déduit les dix lois de conservation de la mécanique classique à partir des dix générateurs infinitésimaux du groupe de Galilée.

Le PREMIER THÉORÈME de NOETHER (1918) consacre ces résultats dans une situation GÉNÉRALE et ABSTRAITE.

En relativité restreinte :

- introduction du groupe spécial de Lorentz par POINCARÉ et EINSTEIN en 1905,
- réinterprétation du principe de relativité par KLEIN comme *invariance par un groupe de transformations* en 1910,
- déduction des dix lois de conservation de la relativité restreinte à partir des générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré par HERGLOTZ (1911).

En 1916, ENGEL déduit les dix lois de conservation de la mécanique classique à partir des dix générateurs infinitésimaux du groupe de Galilée.

Le PREMIER THÉORÈME de NOETHER (1918) consacre ces résultats dans une situation GÉNÉRALE et ABSTRAITE.

En relativité générale : travaux de HILBERT, KLEIN, WEYL et FOKKER sur les lois de conservation en relativité générale, parachevés avec le SECOND THÉORÈME de NOETHER (1918).

Il ne faudrait pas croire

- que l'utilisation des groupes serait naturelle en mécanique quantique étant donné leur « effectivité » dans d'autres théories physiques,
- qu'un public de physiciens théoriciens serait spontanément acquis à l'usage de ce cadre formel.

Il ne faudrait pas croire

- que l'utilisation des groupes serait naturelle en mécanique quantique étant donné leur « effectivité » dans d'autres théories physiques,
- qu'un public de physiciens théoriciens serait spontanément acquis à l'usage de ce cadre formel.

(i) la théorie des groupes et des représentations de groupes est bien circonscrite et a une portée limitée entre 1926 et 1932 parmi les divers projets de mathématisation de la mécanique quantique,

Il ne faudrait pas croire

- que l'utilisation des groupes serait naturelle en mécanique quantique étant donné leur « effectivité » dans d'autres théories physiques,
- qu'un public de physiciens théoriciens serait spontanément acquis à l'usage de ce cadre formel.

(i) la théorie des groupes et des représentations de groupes est bien circonscrite et a une portée limitée entre 1926 et 1932 parmi les divers projets de mathématisation de la mécanique quantique,

(ii) néanmoins, WEYL et WIGNER ne sont pas des acteurs isolés, (HEISENBERG, VON NEUMANN, FOCK, HEITLER, LONDON, VAN DER WAERDEN ; etc. s'appuient sur la théorie des groupes et des représentations de groupes en mécanique quantique),

(iii) La réception de leur travaux par des physiciens oscille entre intérêt, curiosité, circonspection, scepticisme et rejet.

- Dans la correspondance qu'ils entretiennent avec WEYL en 1925-1926, BORN et JORDAN avouent méconnaître la théorie des groupes de Lie.
- En 1926, HEISENBERG mesure l'importance du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ pour étudier des systèmes comportant n particules indiscernables. Son ouvrage de référence est la traduction en allemand (1868) du *Cours d'algèbre supérieure* de SERRET (3ème édition, 1866).

- Dans la correspondance qu'ils entretiennent avec WEYL en 1925-1926, BORN et JORDAN avouent méconnaître la théorie des groupes de Lie.
- En 1926, HEISENBERG mesure l'importance du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ pour étudier des systèmes comportant n particules indiscernables. Son ouvrage de référence est la traduction en allemand (1868) du *Cours d'algèbre supérieure* de SERRET (3ème édition, 1866).

Il convient donc de mieux situer la théorie des représentations de groupes par rapport à d'autres formalisations de la mécanique quantique, alors en plein développement :

- mécanique des matrices de HEISENBERG-BORN-JORDAN (1925),
- mécanique ondulatoire de SCHRÖDINGER (1926),
- unification de ces deux formalismes par VON NEUMANN en 1927 avec une première axiomatisation des espaces de Hilbert ABSTRAITS.

Pourquoi la théorie des groupes et des représentations de groupes ne constitue-t-elle pas un simple « artifice » formel aux yeux de WIGNER et WEYL ?

- Nous verrons qu'elle permet de rendre raison des résultats qualitatifs issus de la spectroscopie pour des systèmes quantiques de COMPLEXITÉ CROISSANTE.

Pourquoi la théorie des groupes et des représentations de groupes ne constitue-t-elle pas un simple « artifice » formel aux yeux de Wigner et Weyl ?

- Nous verrons qu'elle permet de rendre raison des résultats qualitatifs issus de la spectroscopie pour des systèmes quantiques de complexité croissante.

Quels sont les aspects de la mécanique quantique qu'elle met en lumière ?

- Elle permet de faire valoir l'importance des symétries auxquelles les phénomènes quantiques sont assujettis.

Pourquoi la théorie des groupes et des représentations de groupes ne constitue-t-elle pas un simple « artifice » formel aux yeux de WIGNER et WEYL ?

- Nous verrons qu'elle permet de rendre raison des résultats qualitatifs issus de la spectroscopie pour des systèmes quantiques de COMPLEXITÉ CROISSANTE.

Quels sont les aspects de la mécanique quantique qu'elle met en lumière ?

- Elle permet de faire valoir l'importance des SYMÉTRIES auxquelles les phénomènes quantiques sont assujettis.

Quelles sont les fonctions qu'ils assignent à cette manière de mathématiser la mécanique quantique ?

- une fonction UNIFICATRICE pour saisir d'un seul tenant des données expérimentales éparses,
- une fonction de CLARIFICATION des fondements de la mécanique quantique.

0.3. Weyl : un acteur « isolé » dans la mathématisation de la mécanique quantique ?

0.3. Weyl : un acteur « isolé » dans la mathématisation de la mécanique quantique ?

- Jusqu'en 1930, Weyl est professeur de mathématiques à l'ETH de Zürich,
- En 1930, il succède à Hilbert à l'université de Göttingen, avant de fuire l'Allemagne pour Princeton en 1933.

0.3. Weyl : un acteur « isolé » dans la mathématisation de la mécanique quantique ?

- Jusqu'en 1930, WEYL est professeur de mathématiques à l'ETH de Zürich,
- En 1930, il succède à HILBERT à l'université de Göttingen, avant de fuire l'Allemagne pour Princeton en 1933.

Entre 1924 et 1927, les recherches de WEYL sont centrées sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples :

- Dès 1923-1924, prise de connaissance et appropriation de la thèse de CARTAN (1894),
  - (i) classification des algèbres de Lie complexes simples d'après KILLING,
  - (ii) critères de CARTAN pour les algèbres de Lie résolubles et les algèbres de Lie semi-simples,
- reprise de la THÉORIE DES POIDS de CARTAN (1913) pour caractériser les représentations irréductibles des algèbres de Lie semi-simples.

- Connaissance détaillée de la théorie des représentations des groupes finis, notamment développée par FROBENIUS et SCHUR.
    (i) Conformément aux indications de SCHUR, WEYL construit un analogue à cette théorie pour les groupes continus.

- Connaissance détaillée de la théorie des représentations des groupes finis, notamment développée par Frobenius et Schur.
  (i) Conformément aux indications de Schur, Weyl construit un analogue à cette théorie pour les groupes continus.
- Weyl prend connaissance de la « méthode intégrale » développée par Hurwitz (1897) en théorie des invariants via Schur.
  (ii) Il approfondit cette méthode afin de démontrer le théorème de complète réductibilité pour tout groupe de Lie complexe semi-simple.

- Connaissance détaillée de la théorie des représentations des groupes finis, notamment développée par FROBENIUS et SCHUR.
  (i) Conformément aux indications de SCHUR, WEYL construit un analogue à cette théorie pour les groupes continus.
- WEYL prend connaissance de la « méthode intégrale » développée par HURWITZ (1897) en théorie des invariants via SCHUR.
  (ii) Il approfondit cette méthode afin de démontrer le théorème de complète réductibilité pour tout groupe de Lie complexe semi-simple.

Il a une connaissance exhaustive de la théorie des représentations de groupes avant la publication de ses travaux en mécanique quantique. Il situe la théorie des groupes de Lie à L'INTERSECTION entre des méthodes ALGÉBRIQUES et TOPOLOGIQUES.

À la fin de la 4e éd. de *Raum, Zeit, Materie* (1921), il mentionne la théorie des quanta en reconnaissant que sa théorie unifiée des champs ne peut pas rendre compte de la structure de la matière.

À la fin de la 4e éd. de *Raum, Zeit, Materie* (1921), il mentionne la théorie des quanta en reconnaissant que sa théorie unifiée des champs ne peut pas rendre compte de la structure de la matière.

- Il côtoie Schrödinger qui est professeur à l'université de Zürich (départ de Schrödinger pour Berlin en 1927).
- En 1925-1926, il entretient une correspondance avec Born et Jordan qui sont alors à Göttingen.
- Weyl donne des leçons sur la théorie des groupes de Lie et leurs représentations en tant que professeur invité à Göttingen durant le semestre d'hiver 1926-1927.

À la fin de la 4e éd. de *Raum, Zeit, Materie* (1921), il mentionne la théorie des quanta en reconnaissant que sa théorie unifiée des champs ne peut pas rendre compte de la structure de la matière.

- Il côtoie Schrödinger qui est professeur à l'université de Zürich (départ de Schrödinger pour Berlin en 1927).
- En 1925-1926, il entretient une correspondance avec Born et Jordan qui sont alors à Göttingen.
- Weyl donne des leçons sur la théorie des groupes de Lie et leurs représentations en tant que professeur invité à Göttingen durant le semestre d'hiver 1926-1927.

Il a donc des contacts suivis avec les plus éminents acteurs dans la formalisation de la mécanique quantique, non seulement Schrödinger, Born et Jordan, mais également Pauli, von Neumann et Dirac.

En 1927, le départ de Schrödinger et de Debye laisse le champ libre à Weyl pour proposer un enseignement sur la théorie des groupes et la mécanique quantique durant le semestre d'hiver 1927-1928 à l'ETH de Zürich.

En 1927, le départ de Schrödinger et de Debye laisse le champ libre à Weyl pour proposer un enseignement sur la théorie des groupes et la mécanique quantique durant le semestre d'hiver 1927-1928 à l'ETH de Zürich.

Premier article de recherche en mécanique quantique : « Quantenmechanik und Gruppentheorie » (1927).

En 1928 paraît *Gruppentheorie und Quantenmechanik* qui est issu des cours donnés par Weyl à l'ETH. C'est l'une des premières monographies sur la mécanique quantique.

En 1927, le départ de SCHRÖDINGER et de DEBYE laisse le champ libre à WEYL pour proposer un enseignement sur la théorie des groupes et la mécanique quantique durant le semestre d'hiver 1927-1928 à l'ETH de Zürich.

Premier article de recherche en mécanique quantique : « Quantenmechanik und Gruppentheorie » (1927).

En 1928 paraît *Gruppentheorie und Quantenmechanik* qui est issu des cours donnés par Weyl à l'ETH. C'est l'une des premières monographies sur la mécanique quantique.

- WEYL reprend à son compte les dernières avancées en mécanique quantique : unification des formalismes de SCHRÖDINGER et de HEISENBERG-BORN-JORDAN, hypothèse du spin de l'électron (UHLENBECK, GOUDSMIT, PAULI), mécanique quantique relativiste de DIRAC.
- Il synthétise toutes les applications connues de la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique.

Lors de son séjour aux Etats-Unis 1928-1929, WEYL met en valeur l'usage des représentations de groupes en mécanique quantique :

- « The problem of symmetry in quantum mechanics », [*Journal of the Franklin Institute*]
- « The spherical symmetry of atoms », [*Rice Institute Pamphlet*]

Lors de son séjour aux Etats-Unis 1928-1929, Weyl met en valeur l'usage des représentations de groupes en mécanique quantique :

- « The problem of symmetry in quantum mechanics », [*Journal of the Franklin Institute*]
- « The spherical symmetry of atoms », [*Rice Institute Pamphlet*]

En 1931 paraît la seconde édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* : la cinquième partie, consacrée

- à la dualité de Schur-Weyl,
- aux usages de la théorie des représentations de groupes pour décrire les liaisons moléculaires,

est largement remaniée.

Lors de son séjour aux Etats-Unis 1928-1929, WEYL met en valeur l'usage des représentations de groupes en mécanique quantique :

- « The problem of symmetry in quantum mechanics », [*Journal of the Franklin Institute*]
- « The spherical symmetry of atoms », [*Rice Institute Pamphlet*]

En 1931 paraît la seconde édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* : la cinquième partie, consacrée

- à la dualité de SCHUR-WEYL,
- aux usages de la théorie des représentations de groupes pour décrire les liaisons moléculaires,

est largement remaniée.

Gruppentheorie und Quantenmechanik admet une structure similaire à *Raum, Zeit, Materie* : exposé du formalisme mathématique / application de ce formalisme à une théorie physique. WEYL vise un public de MATHÉMATICIENS et de PHYSICIENS.

0.4. Rapide aperçu de la trajectoire de Wigner dans les années 20.

- Études d'ingénieur en chimie à la *Technische Hochschule* de Berlin à partir de 1921,
- Il assiste alors régulièrement aux colloques organisés dans le cadre de la *Deutsche physikalische Gesellschaft*.

0.4. Rapide aperçu de la trajectoire de Wigner dans les années 20.

- Études d'ingénieur en chimie à la *Technische Hochschule* de Berlin à partir de 1921,
- Il assiste alors régulièrement aux colloques organisés dans le cadre de la *Deutsche physikalische Gesellschaft*.

Séjour à Göttingen durant l'année 1927 avec von Neumann.

(i) En 1927, von Neumann axiomatise les espaces de Hilbert abstraits :
   - avancées décisives en analyse fonctionnelle,
   - en retour, unification des formalismes de Schrödinger et de Heisenberg-Born-Jordan.

0.4. Rapide aperçu de la trajectoire de Wigner dans les années 20.

- Études d'ingénieur en chimie à la *Technische Hochschule* de Berlin à partir de 1921,
- Il assiste alors régulièrement aux colloques organisés dans le cadre de la *Deutsche physikalische Gesellschaft*.

Séjour à Göttingen durant l'année 1927 avec VON NEUMANN.

(i) En 1927, VON NEUMANN axiomatise les espaces de Hilbert abstraits :
  - avancées décisives en ANALYSE FONCTIONNELLE,
  - en retour, unification des formalismes de SCHRÖDINGER et de HEISENBERG-BORN-JORDAN.

(ii) En 1926-1927, il attire l'attention de WIGNER sur la théorie des représentations de groupes finis et des groupes de Lie.

(iii) WIGNER et VON NEUMANN publieront à ce propos un article en trois volets sur les systèmes quantiques à *n* particules indiscernables avec spin.

Entre 1926 et 1927, WIGNER étudie de proche en proche les travaux

- de FROBENIUS sur les représentations des groupes finis,
- de SCHUR et WEYL sur les représentations de $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{O}(n)$ (1924),
- de WEYL sur les groupes et les algèbres de Lie complexes semi-simples (1925-1926).

Entre 1926 et 1927, WIGNER étudie de proche en proche les travaux

- de FROBENIUS sur les représentations des groupes finis,
- de SCHUR et WEYL sur les représentations de $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{O}(n)$ (1924),
- de WEYL sur les groupes et les algèbres de Lie complexes semi-simples (1925-1926).

En 1931, WIGNER publie une monographie sur la théorie des groupes et la mécanique quantique intitulée *Gruppentheorie und ihre Anwendung in der Theorie der Atomspektren*.

Entre 1926 et 1927, WIGNER étudie de proche en proche les travaux

- de FROBENIUS sur les représentations des groupes finis,
- de SCHUR et WEYL sur les représentations de $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{O}(n)$ (1924),
- de WEYL sur les groupes et les algèbres de Lie complexes semi-simples (1925-1926).

En 1931, WIGNER publie une monographie sur la théorie des groupes et la mécanique quantique intitulée *Gruppentheorie und ihre Anwendung in der Theorie der Atomspektren*.

Deux problèmes à résoudre

- Quel lien y a-t-il alors entre WEYL et WIGNER ?
- Quelles sont les différences d'approche dans leurs travaux respectifs en mécanique quantique ?

Dans la préface à la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, WEYL fait allusion à WIGNER et VON NEUMANN ; cependant, il effectue l'essentiel de ses recherches indépendamment d'eux.

Dans la préface à la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Weyl fait allusion à Wigner et von Neumann ; cependant, il effectue l'essentiel de ses recherches indépendamment d'eux.

Inversement, Wigner prend connaissance des importantes contributions de Weyl sur les représentations des groupes de Lie via von Neumann entre 1926-1927.

Dans la préface à la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Weyl fait allusion à Wigner et von Neumann ; cependant, il effectue l'essentiel de ses recherches indépendamment d'eux.

Inversement, Wigner prend connaissance des importantes contributions de Weyl sur les représentations des groupes de Lie via von Neumann entre 1926-1927.

Hypothèse de Mackey :

- l'approche de Wigner serait plus PRAGMATIQUE,
- Weyl s'intéresserait davantage aux FONDEMENTS de la mécanique quantique.

Mackey justifie cette distinction à la lumière des parcours respectifs de Wigner et Weyl. En réalité, l'étude de leurs travaux n'atteste pas d'une différence aussi tranchée.

- Wigner s'est tout autant intéressé aux fondements de la mécanique quantique que Weyl.

0.5. Plan de l'exposé

Première partie : les représentations de groupes ; quelques applications élémentaires à la mécanique quantique.

- rappels conceptuels sur les représentations de groupes,
- le principe de Wigner,
- l'atome d'hydrogène et les symétries sphériques,
- les fonctions que WEYL et WIGNER assignent aux représentations de groupes en mécanique quantique,
- relativisation de l'hypothèse de MACKEY.

0.5. Plan de l'exposé

Première partie : les représentations de groupes ; quelques applications élémentaires à la mécanique quantique.

- rappels conceptuels sur les représentations de groupes,
- le principe de Wigner,
- l'atome d'hydrogène et les symétries sphériques,
- les fonctions que WEYL et WIGNER assignent aux représentations de groupes en mécanique quantique,
- relativisation de l'hypothèse de MACKEY.

Deuxième partie : situation de la théorie des représentations de groupes dans la mathématisation de la mécanique quantique.

- concurrence ou complémentarité des formalismes ?
- relativisation de la « Gruppenpest » : réception contrastée des travaux de WIGNER, WEYL et VAN DER WAERDEN par les physiciens.

Troisième partie : vers une réflexion générale sur les symétries en physique.

- le « modèle » de la cristallographie,
- le principe de relativité comme exemple fondamental de principe d'invariance,
- lois de la nature et symétries,
- une classification des symétries.

Troisième partie : vers une réflexion générale sur les symétries en physique.

- le « modèle » de la cristallographie,
- le principe de relativité comme exemple fondamental de principe d'invariance,
- lois de la nature et symétries,
- une classification des symétries.

Conclusion :

- prolongements des travaux fondateurs de WEYL et WIGNER
- proximité et complémentarité des thèses de WEYL et de WIGNER sur les symétries.

I. représentations de groupes, applications élémentaires en mécanique quantique.

I.1. Rappels sur les représentations de groupes

Une représentation linéaire d'un groupe fini G est la donnée d'un espace vectoriel complexe de dimension finie E et d'un morphisme de groupe $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$.

- si e désigne l'élément neutre de G, $\rho(e) = Id_E$,
- pour tout $g \in G$, $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$,
- pour tous g, $g' \in G$, $\rho(gg') = \rho(g)\rho(g')$.

I. représentations de groupes, applications élémentaires en mécanique quantique.

I.1. Rappels sur les représentations de groupes

Une représentation linéaire d'un groupe fini G est la donnée d'un espace vectoriel complexe de dimension finie E et d'un morphisme de groupe $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$.

- si e désigne l'élément neutre de G, $\rho(e) = Id_E$,
- pour tout $g \in G$, $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$,
- pour tous g, $g' \in G$, $\rho(gg') = \rho(g)\rho(g')$.

Soit (E,ρ) une représentation de G. Un sous-espace F de E est dit invariant par ρ si, pour tout $g \in G$, $\rho(g)F \subset F$.

- une représentation (E,ρ) de G est IRRÉDUCTIBLE si $E \neq \{0\}$ et s'il n'existe pas de sous-espace non trivial invariant par ρ.
- une représentation (E,ρ) de G est COMPLÈTEMENT RÉDUCTIBLE si elle peut être décomposée en somme directe de représentations irréductibles.

Théorème de complète réductibilité : toute représentation de dimension finie d'un groupe fini G est complètement réductible. Ce théorème est établi de manière indépendante par Molien, Maschke et Frobenius en 1896-1897.

THÉORÈME DE COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ : toute représentation de dimension finie d'un groupe fini G est complètement réductible. Ce théorème est établi de manière indépendante par MOLIEN, MASCHKE et FROBENIUS en 1896-1897.

- La théorie des représentations matricielles des GROUPES FINIS se développe avec les travaux de FROBENIUS, MASCHKE, BURNSIDE, SCHUR au tournant du XX^{e} siècle.
- La définition des représentations de groupes à partir de la donnée d'un espace vectoriel est due à WEYL et NOETHER au cours des années 20.

Théorème de complète réductibilité : toute représentation de dimension finie d'un groupe fini G est complètement réductible. Ce théorème est établi de manière indépendante par Molien, Maschke et Frobenius en 1896-1897.

- La théorie des représentations matricielles des groupes finis se développe avec les travaux de Frobenius, Maschke, Burnside, Schur au tournant du XX^{e} siècle.
- La définition des représentations de groupes à partir de la donnée d'un espace vectoriel est due à Weyl et Noether au cours des années 20.

En 1925, Weyl démontre le *théorème de complète réductibilité* pour tout *groupe de Lie complexes semi-simples*, (i.e. dont l'algèbre de Lie est semi-simple, ce qui signifie qu'elle n'est pas commutative et qu'elle ne possède pas d'idéaux résolubles non triviaux).

En 1933-1936, Haar et von Neumann développent la théorie des représentations des groupes topologiques compacts.

La décomposition d'une représentation de groupe en ses composantes irréductibles joue un rôle essentiel en mécanique quantique, cf. le *principe de Wigner* [Wigner's theorem] établi par ce dernier dans sa monographie de 1931.

I.2. Liens avec la mécanique quantique : le principe de Wigner.

Rappelons les deux postulats de la mécanique quantique (établis à la suite de l'axiomatisation des espaces de Hilbert par von Neumann en 1927) :

(i) À chaque système quantique est associé un espace de Hilbert complexe $\mathscr{H}$ — un espace de Hilbert complexe étant un e.v. sur $\mathbb{C}$ de dimension finie ou infinie muni d'un produit scalaire hermitien $\langle , \rangle$ et complet au sens de Cauchy — ; L'état du système est *représenté* à chaque instant, par un vecteur normé $|\psi(t)\rangle$ de $\mathscr{H}$.

(ii) À toute grandeur physique A est associé un opérateur linéaire hermitien $\widehat{A}$ de $\mathscr{H}$, $\widehat{A}$ s'appelle l'*observable* représentant A.

- L'*adjoint* $\widehat{A}^*$ d'un opérateur $\widehat{A}$ est défini par $\langle \widehat{A}x, y\rangle = \langle x, \widehat{A}^* y\rangle$, pour tous x, y de $\mathscr{H}$.
- Un opérateur $\widehat{A}$ est dit *hermitien* ou *autoadjoint* si $\widehat{A} = \widehat{A}^*$.

(ii) À toute grandeur physique A est associé un opérateur linéaire hermitien $\widehat{A}$ de $\mathscr{H}$, $\widehat{A}$ s'appelle l'*observable* représentant A.
- L'*adjoint* $\widehat{A}^*$ d'un opérateur $\widehat{A}$ est défini par $\langle \widehat{A}x, y\rangle = \langle x, \widehat{A}^* y\rangle$, pour tous x, y de $\mathscr{H}$.
- Un opérateur $\widehat{A}$ est dit *hermitien* ou *autoadjoint* si $\widehat{A} = \widehat{A}^*$.

En mécanique quantique (non relativiste), Les transformations géométriques dans l'*espace usuel* $\mathbb{R}^3$ doivent être « représentées » dans l'*espace des états* du système ; à chaque transformation géométrique doit être associée une transformation agissant sur les états quantiques du système, i.e. un opérateur sur $\mathscr{H}$.

(ii) À toute grandeur physique A est associé un opérateur linéaire hermitien $\widehat{A}$ de $\mathscr{H}$, $\widehat{A}$ s'appelle l'*observable* représentant A.
- L'*adjoint* $\widehat{A}^*$ d'un opérateur $\widehat{A}$ est défini par $\langle \widehat{A}x, y\rangle = \langle x, \widehat{A}^* y\rangle$, pour tous x, y de $\mathscr{H}$.
- Un opérateur $\widehat{A}$ est dit *hermitien* ou *autoadjoint* si $\widehat{A} = \widehat{A}^*$.

En mécanique quantique (non relativiste), Les transformations géométriques dans l'*espace usuel* $\mathbb{R}^3$ doivent être « représentées » dans l'*espace des états* du système ; à chaque transformation géométrique doit être associée une transformation agissant sur les états quantiques du système, i.e. un opérateur sur $\mathscr{H}$.

Il semble « naturel » d'introduire le cadre formel des représentations de groupes :

Soit G un groupe de transformations géométriques (par exemple le groupe des rotations dans l'espace) et $\mathscr{H}$ l'espace des états du système étudié, il s'agit d'introduire un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathscr{H})$ qui, à toute transformation géométrique g de G, associe un opérateur $\widehat{U} \in \mathrm{GL}(\mathscr{H})$.

Une *symétrie* en mécanique quantique ne désigne donc pas un ensemble de transformations géométriques dans l'espace usuel, mais un ensemble d'opérateurs agissant sur l'espace $\mathscr{H}$ des états du système.

Une *symétrie* en mécanique quantique ne désigne donc pas un ensemble de transformations géométriques dans l'espace usuel, mais un ensemble d'opérateurs agissant sur l'espace $\mathscr{H}$ des états du système.

Soit $\widehat{H}$ le hamiltonien quantique du système étudié, i.e. l'opérateur hermitien associé à l'énergie, un *opérateur de symétrie* du système est

- un opérateur unitaire, i.e. $\widehat{U}\widehat{U}^* = \widehat{U}^*\widehat{U} = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$.
- qui commute avec $\widehat{H}$, i.e. $[\widehat{U}, \widehat{H}] = 0$.

Une *symétrie* en mécanique quantique ne désigne donc pas un ensemble de transformations géométriques dans l'espace usuel, mais un ensemble d'opérateurs agissant sur l'espace $\mathscr{H}$ des états du système.

Soit $\widehat{H}$ le hamiltonien quantique du système étudié, i.e. l'opérateur hermitien associé à l'énergie, un *opérateur de symétrie* du système est

- un opérateur unitaire, i.e. $\widehat{U}\widehat{U}^* = \widehat{U}^*\widehat{U} = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$.
- qui commute avec $\widehat{H}$, i.e. $[\widehat{U}, \widehat{H}] = 0$.

Un *groupe de symétries* du système est constitué d'opérateurs de symétrie. Parmi tous les groupes de symétries, il en existe un qui contient tous les autres : le *groupe de symétries complet* du système étudié. La mise au jour de ce groupe conditionne une description cohérente de ce système.

WIGNER étudie de manière systématique les concepts d'OPÉRATEUR DE SYMÉTRIE et de GROUPE DE SYMÉTRIES dans sa monographie sur la mécanique quantique :

WIGNER étudie de manière systématique les concepts d'OPÉRATEUR DE SYMÉTRIE et de GROUPE DE SYMÉTRIES dans sa monographie sur la mécanique quantique :

« There are physical quantities, in the present case the energy, from whose point of view the states φ and $P_R\varphi$ are equivalent. This means that the measurement of these quantities gives the same values with the same probabilities for φ and for $P_R\varphi$. The operators which correspond to physical quantities of this nature are called *symmetric* under the transformations P_R. Conversely, the group is called the *symmetry group* of the physical quantity ». [*Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, p. 108.]

Soit G un groupe de symétries du système étudié, $\widehat{H}$ son hamiltonien et $\mathscr{E}_n$ l'espace vectoriel de dimension m engendré par les vecteurs propres de $\widehat{H}$ pour la valeur propre E_n (il s'agit du niveau d'énergie E_n), i.e. les vecteurs $|\Psi\rangle$ tels que

$$\widehat{H}(|\Psi\rangle) = E_n(|\Psi\rangle),$$

Soit G un groupe de symétries du système étudié, $\widehat{H}$ son hamiltonien et $\mathscr{E}_n$ l'espace vectoriel de dimension m engendré par les vecteurs propres de $\widehat{H}$ pour la valeur propre E_n (il s'agit du niveau d'énergie E_n), i.e. les vecteurs $|\Psi\rangle$ tels que

$$\widehat{H}(|\Psi\rangle) = E_n(|\Psi\rangle),$$

soit $|\Psi\rangle \in \mathscr{E}_n$ et $\widehat{U} \in G$, comme $\widehat{U}$ commute avec $\widehat{H}$, on obtient :

$$\widehat{H}(\widehat{U}|\Psi\rangle) = \widehat{U}(\widehat{H}|\Psi\rangle) = E_n(\widehat{U}|\Psi\rangle).$$

Soit G un groupe de symétries du système étudié, $\widehat{H}$ son hamiltonien et $\mathscr{E}_n$ l'espace vectoriel de dimension m engendré par les vecteurs propres de $\widehat{H}$ pour la valeur propre E_n (il s'agit du niveau d'énergie E_n), i.e. les vecteurs $|\Psi\rangle$ tels que

$$\widehat{H}(|\Psi\rangle) = E_n(|\Psi\rangle),$$

soit $|\Psi\rangle \in \mathscr{E}_n$ et $\widehat{U} \in G$, comme $\widehat{U}$ commute avec $\widehat{H}$, on obtient :

$$\widehat{H}(\widehat{U}|\Psi\rangle) = \widehat{U}(\widehat{H}|\Psi\rangle) = E_n(\widehat{U}|\Psi\rangle).$$

Le vecteur $\widehat{U}|\Psi\rangle$ est vecteur propre pour la valeur propre E_n, il fait partie de $\mathscr{E}_n$. Cet espace est invariant ou stable par G. Il peut donc servir d'espace sous-jacent à une représentation $(\mathscr{E}_n, \rho)$ de G.

Si G s'identifie au groupe de symétries complet du système, alors une telle représentation est *irréductible*. Le principe de Wigner découle de cette implication.

Si G s'identifie au groupe de symétries complet du système, alors une telle représentation est *irréductible*. Le principe de Wigner découle de cette implication.

principe de Wigner : chaque niveau d'énergie d'un système quantique est en correspondance avec l'une des représentations irréductibles du groupe de symétries *complet* de son hamiltonien. « we can state that *one irreducible representation corresponds to each eigenvalue* ». [p. 119]

Si G s'identifie au groupe de symétries complet du système, alors une telle représentation est *irréductible*. Le principe de Wigner découle de cette implication.

principe de Wigner : chaque niveau d'énergie d'un système quantique est en correspondance avec l'une des représentations irréductibles du groupe de symétries *complet* de son hamiltonien. « we can state that *one irreducible representation corresponds to each eigenvalue* ». [p. 119]

La *dimension* de la représentation irréductible associée à un niveau d'énergie correspond exactement au *degré de dégénérescence* de ce niveau d'énergie — une dégénérescence traduisant l'existence de plusieurs états quantiques associés à un même niveau d'énergie.

La question est de comprendre le STATUT et les FONCTIONS de ce principe dans l'étude des systèmes quantiques.

Un exemple non trivial : l'atome d'hydrogène. Si l'on exclut le spin et les effets relativistes, le hamiltonien de l'atome d'hydrogène est

$$\widehat{H}_0 = \frac{p^2}{m_e} - \frac{e^2}{r},$$

p désigne le module de la quantité de mouvement de l'électron, m_e sa masse, r sa distance au centre et e^2 l'intensité de l'attraction électrostatique.

Un exemple non trivial : l'atome d'hydrogène. Si l'on exclut le spin et les effets relativistes, le hamiltonien de l'atome d'hydrogène est

$$\widehat{H}_0 = \frac{p^2}{m_e} - \frac{e^2}{r},$$

p désigne le module de la quantité de mouvement de l'électron, m_e sa masse, r sa distance au centre et e^2 l'intensité de l'attraction électrostatique.

Comme tout hamiltonien comportant un potentiel central — qui ne dépend que de la distance au centre —, $\widehat{H}_0$ a un groupe de symétries isomorphe à SO_3. Est-ce son groupe de symétries *complet* ?

Un exemple non trivial : l'atome d'hydrogène. Si l'on exclut le spin et les effets relativistes, le hamiltonien de l'atome d'hydrogène est

$$\widehat{H}_0 = \frac{p^2}{m_e} - \frac{e^2}{r},$$

p désigne le module de la quantité de mouvement de l'électron, m_e sa masse, r sa distance au centre et e^2 l'intensité de l'attraction électrostatique.

Comme tout hamiltonien comportant un potentiel central — qui ne dépend que de la distance au centre —, $\widehat{H}_0$ a un groupe de symétries isomorphe à SO_3. Est-ce son groupe de symétries *complet* ?

Pour l'atome d'hydrogène, chaque niveau d'énergie E_n possède la dégénérescence n^2. Ceci entraîne que l'espace propre $\mathscr{E}_n$ pour la valeur propre E_n n'est pas *irréductible* sous l'action de SO_3.

- soit le principe de Wigner est mis en défaut,
- soit le groupe de symétries *complet* du système est plus gros que SO_3.

La deuxième solution doit être retenue au vu de la spécificité du hamiltonien de l'hydrogène — celui-ci possédant un potentiel coulombien $-e^2/r$.

La deuxième solution doit être retenue au vu de la spécificité du hamiltonien de l'hydrogène — celui-ci possédant un potentiel coulombien $-e^2/r$.

En mécanique classique, une particule soumise à un champ coulombien décrit une trajectoire elliptique telle que les axes de l'ellipse restent fixes au cours du mouvement, ce qui se traduit par la constance en direction et en module d'un vecteur connu sous le nom de vecteur de *Runge-Lenz*.

- Les trois composantes de ce vecteur constituent alors des constantes de mouvement au même titre que les composantes du moment cinétique.

La deuxième solution doit être retenue au vu de la spécificité du hamiltonien de l'hydrogène — celui-ci possédant un potentiel coulombien $-e^2/r$.

En mécanique classique, une particule soumise à un champ coulombien décrit une trajectoire elliptique telle que les axes de l'ellipse restent fixes au cours du mouvement, ce qui se traduit par la constance en direction et en module d'un vecteur connu sous le nom de vecteur de *Runge-Lenz*.

- Les trois composantes de ce vecteur constituent alors des constantes de mouvement au même titre que les composantes du moment cinétique.

À chaque composante du vecteur de *Runge-Lenz* correspond une observable qui commute avec le hamiltonien $\widehat{H}_0$ de l'atome d'hydrogène.

La conservation du moment cinétique et du vecteur de *Runge-Lenz* permet d'en déduire que le groupe de symétries complet de l'atome d'hydrogène n'est pas isomorphe à SO_3 mais à SO_4.

L'exemple de l'atome d'hydrogène

(i) montre que la détermination du groupe de symétrie complet d'un système quantique ne va pas de soi,

(ii) confirme la validité du principe de Wigner.

L'exemple de l'atome d'hydrogène

(i) montre que la détermination du groupe de symétrie complet d'un système quantique ne va pas de soi,

(ii) confirme la validité du principe de Wigner.

Le principe de Wigner permet donc

- de *classer* les niveaux d'énergie d'un système quantique en fonction des représentations irréductibles du groupe de symétrie complet du système,
- de rendre raison du *degré de dégénérescence* d'un niveau d'énergie ; ce degré s'identifie à la DIMENSION de la représentation irréductible associée au niveau d'énergie en question.

L'exemple de l'atome d'hydrogène

(i) montre que la détermination du groupe de symétrie complet d'un système quantique ne va pas de soi,

(ii) confirme la validité du principe de Wigner.

Le principe de Wigner permet donc

- de *classer* les niveaux d'énergie d'un système quantique en fonction des représentations irréductibles du groupe de symétrie complet du système,
- de rendre raison du *degré de dégénérescence* d'un niveau d'énergie ; ce degré s'identifie à la DIMENSION de la représentation irréductible associée au niveau d'énergie en question.

Le principe de Wigner n'est donc pas un énoncé purement formel. Il ne s'agit pas d'un THÉORÈME issu de la théorie des représentations de groupes, mais bien d'un PRINCIPE PHYSIQUE qui montre l'EFFECTIVITÉ de ce cadre mathématique en mécanique quantique.

Le principe de Wigner n'est pas non plus une RÈGLE EMPIRIQUE au sens où il ne dérive pas de l'expérience.

Le principe de Wigner n'est pas non plus une RÈGLE EMPIRIQUE au sens où il ne dérive pas de l'expérience.

(i) Il se situe à la jonction entre une théorie mathématique et une théorie physique, ce qui garantit son sens et sa portée ;
   - il peut servir de contre-exemple pour montrer combien il est problématique de vouloir tracer une ligne de démarcation entre des énoncés mathématiques — qui seraient ANALYTIQUES et A PRIORI — et des énoncés empiriques — qui seraient SYNTHÉTIQUES et A POSTERIORI.

(ii) Il peut être qualifié d'A PRIORI au sens où il s'agit d'un principe CONSTITUTIF (une connaissance A PRIORI en un sens affaibli est révisable). Le principe de Wigner montre comment des symétries PRÉSIDENT à la détermination de données empiriques (niveaux d'énergie d'un système, degré de dégénérescence de ces niveaux d'énergie).

I.3. lois de conservation et symétries en mécanique quantique.

I.3. lois de conservation et symétries en mécanique quantique.

Pour rappel, l'article fondamental d'E. Noether intitulé « Invariante Variationsprobleme » (1918) établit une correspondance entre SYMÉTRIES et LOIS DE CONSERVATION avec un niveau de GÉNÉRALITÉ REMARQUABLE, ce qui singularise son approche par rapport à celle de ses contemporains (Herglotz, Engel, Fokker, Weyl, etc.)

I.3. lois de conservation et symétries en mécanique quantique.

Pour rappel, l'article fondamental d'E. NOETHER intitulé « Invariante Variationsprobleme » (1918) établit une correspondance entre SYMÉTRIES et LOIS DE CONSERVATION avec un niveau de GÉNÉRALITÉ REMARQUABLE, ce qui singularise son approche par rapport à celle de ses contemporains (HERGLOTZ, ENGEL, FOKKER, WEYL, etc.)

Énoncé simplifié du premier théorème de NOETHER.

Soient $L(x, u^{(m)})$ un lagrangien *généralisé*, i.e. une fonction lisse de n variables indépendantes $(x_1, ..., x_n)$ et de p variables dépendantes $(u_1, ..., u_p)$ ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m et Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$,

Un problème variationnel généralisé consiste à trouver un extremum à la fonctionnelle

$$I = \int_\Omega L(x, u^{(m)})\mathrm{d}x.$$

Premier théorème de NOETHER : soit $\mathfrak{G}$ un groupe de Lie à un nombre fini de paramètres qui laisse l'intégrale I invariante, on a une correspondance biunivoque entre LOIS DE CONSERVATION et GÉNÉRATEURS INFINITÉSIMAUX de $\mathfrak{G}$.

Premier théorème de NOETHER : soit $\mathfrak{G}$ un groupe de Lie à un nombre fini de paramètres qui laisse l'intégrale I invariante, on a une correspondance biunivoque entre LOIS DE CONSERVATION et GÉNÉRATEURS INFINITÉSIMAUX de $\mathfrak{G}$.

Ce théorème montre l'importance des SYMÉTRIES pour déduire des LOIS DE CONSERVATION dans diverses théories physiques.

Premier théorème de NOETHER : soit $\mathfrak{G}$ un groupe de Lie à un nombre fini de paramètres qui laisse l'intégrale I invariante, on a une correspondance biunivoque entre LOIS DE CONSERVATION et GÉNÉRATEURS INFINITÉSIMAUX de $\mathfrak{G}$.

Ce théorème montre l'importance des SYMÉTRIES pour déduire des LOIS DE CONSERVATION dans diverses théories physiques.

- NOETHER raisonne à partir d'un formalisme lagrangien,
- dans son article, elle ne spécifie pas la nature du lagrangien et des groupes de Lie dont il est question,
- elle ne circonscrit pas ce théorème à la mécanique classique.

Premier théorème de NOETHER : soit $\mathfrak{G}$ un groupe de Lie à un nombre fini de paramètres qui laisse l'intégrale I invariante, on a une correspondance biunivoque entre LOIS DE CONSERVATION et GÉNÉRATEURS INFINITÉSIMAUX de $\mathfrak{G}$.

Ce théorème montre l'importance des SYMÉTRIES pour déduire des LOIS DE CONSERVATION dans diverses théories physiques.

- NOETHER raisonne à partir d'un formalisme lagrangien,
- dans son article, elle ne spécifie pas la nature du lagrangien et des groupes de Lie dont il est question,
- elle ne circonscrit pas ce théorème à la mécanique classique.

Le premier théorème de NOETHER ne saurait être confondu avec certaines de ses applications particulières, que ce soit en MÉCANIQUE CLASSIQUE ou en RELATIVITÉ RESTREINTE.

Par exemple, en mécanique classique nous avons les relations suivantes entre symétries et quantités conservées :

- groupe des rotations dans l'espace / moment cinétique,
- groupe des translations dans le temps / énergie,
- groupe des translations dans l'espace / impulsion totale.

Par exemple, en mécanique classique nous avons les relations suivantes entre symétries et quantités conservées :

- groupe des rotations dans l'espace / moment cinétique,
- groupe des translations dans le temps / énergie,
- groupe des translations dans l'espace / impulsion totale.

Il s'agit là d'applications particulières du premier théorème de Noether.

Par exemple, en mécanique classique nous avons les relations suivantes entre symétries et quantités conservées :

- groupe des rotations dans l'espace / moment cinétique,
- groupe des translations dans le temps / énergie,
- groupe des translations dans l'espace / impulsion totale.

Il s'agit là d'applications particulières du premier théorème de NOETHER.

Le premier théorème de NOETHER est général en raison

- de sa TRANSVERSALITÉ (il peut se réaliser dans plusieurs cadres théoriques),
- du DEGRÉ D'ABSTRACTION des objets mathématiques introduits.

En 1927-1928, Weyl et Wigner entendent faire le lien entre « lois de conservation » et symétries en mécanique quantique sans référence, même indirecte, aux travaux de Noether.

- E. Wigner, « Über die Erhaltungssätze in der Quantenmechanik » (1927),
- H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

En 1927-1928, Weyl et Wigner entendent faire le lien entre « lois de conservation » et symétries en mécanique quantique sans référence, même indirecte, aux travaux de Noether.

- E. Wigner, « Über die Erhaltungssätze in der Quantenmechanik » (1927),
- H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

Wigner : « en raison de la "signification statistique de la mécanique quantique", beaucoup de nos concepts physiques habituels doivent faire l'objet d'une profonde révision (...)
On sait que l'on ne peut jamais poser la question suivante dans le cadre de la mécanique quantique : « quelle est la valeur de la coordonnée des X ou de l'énergie de ce corps ? » ; on peut seulement se demander « quelle est la probabilité pour que la tentative afin de déterminer la coordonnée des X (ou l'énergie) donne telle ou telle valeur ? ». Nous devons également formuler les lois de conservation dans ce sens. Elles s'énoncent par exemple ainsi : la probabilité que l'énergie prenne la valeur E ne change pas au cours du temps ».

Résultat fondamental établi par WIGNER : « La condition analytique afin qu'il y ait loi de conservation pour une grandeur à laquelle correspond l'opérateur hermitien Q est que Q commute avec l'opérateur-énergie H ».

Résultat fondamental établi par Wigner : « La condition analytique afin qu'il y ait loi de conservation pour une grandeur à laquelle correspond l'opérateur hermitien Q est que Q commute avec l'opérateur-énergie H ».

Autrement dit, la commutation de Q avec le hamiltonien implique qu'il s'agit d'une « constante de mouvement », i.e. les valeurs moyennes et en particulier les valeurs propres de Q restent constantes au cours du temps.

Résultat fondamental établi par WIGNER : « La condition analytique afin qu'il y ait loi de conservation pour une grandeur à laquelle correspond l'opérateur hermitien Q est que Q commute avec l'opérateur-énergie H ».

Autrement dit, la commutation de Q avec le hamiltonien implique qu'il s'agit d'une « constante de mouvement », i.e. les valeurs moyennes et en particulier les valeurs propres de Q restent constantes au cours du temps.

Supposons que le groupe de symétries du système quantique considéré soit *un groupe de Lie*. Ce groupe est constitué de transformations unitaires qui commutent avec le hamiltonien. Les *lois de conservation* sont associées aux *générateurs infinitésimaux* de ce groupe.

- il s'agit là d'un analogue au premier théorème de NOETHER en mécanique quantique.

WIGNER : « les lois de conservation sont obtenues à partir de transformations unitaires qui laissent l'opérateur hamiltonien invariant ».

WIGNER : « les lois de conservation sont obtenues à partir de transformations unitaires qui laissent l'opérateur hamiltonien invariant ».

Supposons qu'un groupe G de symétrie du système soit isomorphe à SO_3. Le groupe SO_3 est un groupe de Lie à trois paramètres dont des générateurs infinitésimaux L_x, L_y, L_z peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

WIGNER : « les lois de conservation sont obtenues à partir de transformations unitaires qui laissent l'opérateur hamiltonien invariant ».

Supposons qu'un groupe G de symétrie du système soit isomorphe à SO_3. Le groupe SO_3 est un groupe de Lie à trois paramètres dont des générateurs infinitésimaux L_x, L_y, L_z peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

L_x, L_y et L_z forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$ de SO_3, $\mathfrak{so}_3$ correspond à l'ensemble des matrices carrées 3×3 antisymétriques.

Comme G est un groupe de symétrie du système, ses générateurs infinitésimaux $\widehat{L}_x$, $\widehat{L}_y$ et $\widehat{L}_z$ — qui correspondent à L_x, L_y et L_z — sont des opérateurs hermitiens qui commutent avec le hamiltonien du système.

Comme G est un groupe de symétrie du système, ses générateurs infinitésimaux $\widehat{L}_x$, $\widehat{L}_y$ et $\widehat{L}_z$ — qui correspondent à L_x, L_y et L_z — sont des opérateurs hermitiens qui commutent avec le hamiltonien du système.

Étant donné le résultat de WIGNER, il s'agit de constantes de mouvement, i.e. d'opérateurs dont les valeurs propres restent constantes au cours du temps.

- Les opérateurs $\widehat{L}_x$, $\widehat{L}_y$ et $\widehat{L}_z$ sont les composantes du moment cinétique.

Comme G est un groupe de symétrie du système, ses générateurs infinitésimaux $\widehat{L}_x$, $\widehat{L}_y$ et $\widehat{L}_z$ — qui correspondent à L_x, L_y et L_z — sont des opérateurs hermitiens qui commutent avec le hamiltonien du système.

Étant donné le résultat de WIGNER, il s'agit de constantes de mouvement, i.e. d'opérateurs dont les valeurs propres restent constantes au cours du temps.

- Les opérateurs $\widehat{L}_x$, $\widehat{L}_y$ et $\widehat{L}_z$ sont les composantes du moment cinétique.

Cet exemple, mentionné en passant par WIGNER dans son article, est étudié en détail par WEYL dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

Comme G est un groupe de symétrie du système, ses générateurs infinitésimaux $\widehat{L}_x$, $\widehat{L}_y$ et $\widehat{L}_z$ — qui correspondent à L_x, L_y et L_z — sont des opérateurs hermitiens qui commutent avec le hamiltonien du système.

Étant donné le résultat de WIGNER, il s'agit de constantes de mouvement, i.e. d'opérateurs dont les valeurs propres restent constantes au cours du temps.

- Les opérateurs $\widehat{L}_x$, $\widehat{L}_y$ et $\widehat{L}_z$ sont les composantes du moment cinétique.

Cet exemple, mentionné en passant par WIGNER dans son article, est étudié en détail par WEYL dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

En 1927-1928, ni WEYL, ni WIGNER ne disent se situer dans le prolongement des travaux remarquables de NOETHER sur les symétries et les lois de conservation.

I.4. représentations de groupes et nombres quantiques

Le principe de Wigner permet de *classer les niveaux d'énergie* en fonction des représentations irréductibles du groupe de symétrie complet du hamiltonien d'un système.

I.4. représentations de groupes et nombres quantiques

Le principe de Wigner permet de *classer les niveaux d'énergie* en fonction des représentations irréductibles du groupe de symétrie complet du hamiltonien d'un système.

Le formalisme de la théorie des représentations de groupes peut être employé pour *classer les états quantiques* d'un système.

I.4. représentations de groupes et nombres quantiques

Le principe de Wigner permet de *classer les niveaux d'énergie* en fonction des représentations irréductibles du groupe de symétrie complet du hamiltonien d'un système.

Le formalisme de la théorie des représentations de groupes peut être employé pour *classer les états quantiques* d'un système.

- D'une manière générale, il s'agit d'associer à chaque état les valeurs d'un ensemble complet de *nombres quantiques*,
- les nombres quantiques sont les valeurs propres d'observables, i.e. d'opérateurs hermitiens associés à des grandeurs physiques.

I.4. représentations de groupes et nombres quantiques

Le principe de Wigner permet de *classer les niveaux d'énergie* en fonction des représentations irréductibles du groupe de symétrie complet du hamiltonien d'un système.

Le formalisme de la théorie des représentations de groupes peut être employé pour *classer les états quantiques* d'un système.

- D'une manière générale, il s'agit d'associer à chaque état les valeurs d'un ensemble complet de *nombres quantiques*,
- les nombres quantiques sont les valeurs propres d'observables, i.e. d'opérateurs hermitiens associés à des grandeurs physiques.

Plusieurs nombres quantiques sont généralement nécessaires pour caractériser les états quantiques d'un système. Ils repèrent des valeurs propres d'observables $\widehat{A}$ qui *commutent* entre elles et qui *commutent* avec le hamiltonien du système.

La commutation entre les observables $\widehat{A}$ correspond au fait que l'état quantique décrit doit être *vecteur propre commun* aux différents $\widehat{A}$,

- ceci permet une détermination « simultanée » de la mesure des valeurs des nombres quantiques associés à chacune des $\widehat{A}$
- inversement, le PRINCIPE D'INDÉTERMINATION de Heisenberg traduit la non commutation entre certaines observables.

La commutation entre les observables $\widehat{A}$ correspond au fait que l'état quantique décrit doit être *vecteur propre commun* aux différents $\widehat{A}$,

- ceci permet une détermination « simultanée » de la mesure des valeurs des nombres quantiques associés à chacune des $\widehat{A}$
- inversement, le PRINCIPE D'INDÉTERMINATION de Heisenberg traduit la non commutation entre certaines observables.

Un ensemble d'observables qui commutent est dit *complet* s'il permet une caractérisation unique (à une phase près) des états quantiques du système étudié.

La commutation entre les observables $\widehat{A}$ correspond au fait que l'état quantique décrit doit être *vecteur propre commun* aux différents $\widehat{A}$,

- ceci permet une détermination « simultanée » de la mesure des valeurs des nombres quantiques associés à chacune des $\widehat{A}$
- inversement, le PRINCIPE D'INDÉTERMINATION de Heisenberg traduit la non commutation entre certaines observables.

Un ensemble d'observables qui commutent est dit *complet* s'il permet une caractérisation unique (à une phase près) des états quantiques du système étudié.

L'objectif de WEYL et de WIGNER est de parvenir à une telle caractérisation en employant le langage et le formalisme des représentations de groupes.

Il s'agit de la motivation principale, mise en exergue dans l'introduction à *Gruppentheorie und Quantenmechanik* :

« The investigation of groups first becomes a connected and complete theory in *the theory of the representation of groups by linear transformations*, and it is exactly this mathematically most important part which is necessary for an adequate description of the quantum mechanical relations. *All quantum numbers, with the exception of the so-called principal quantum number, are indices characterizing representations of groups* ».

Il s'agit de la motivation principale, mise en exergue dans l'introduction à *Gruppentheorie und Quantenmechanik* :

« The investigation of groups first becomes a connected and complete theory in *the theory of the representation of groups by linear transformations*, and it is exactly this mathematically most important part which is necessary for an adequate description of the quantum mechanical relations. *All quantum numbers, with the exception of the so-called principal quantum number, are indices characterizing representations of groups* ».

- La théorie des représentations de groupes garantit une UNITÉ aux diverses investigations sur les groupes (qu'ils soient finis ou continus),
- WEYL entend justifier son usage en mécanique quantique : il ne s'agit pas d'un pur ARTIFICE formel.

Exemple :

Pour une particule sans spin, le moment cinétique total s'identifie au moment cinétique orbital. Soit $\widehat{L}^2 = \widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2$ le carré du moment cinétique orbital, $\widehat{L}_x$, $\widehat{L}_y$ et $\widehat{L}_z$ ses composantes suivant les axes des x, des y et des z. Les opérateurs hermitiens $\widehat{L}^2$ et $\widehat{L}_z$ commutent entre eux :

$$[\widehat{L}^2, \widehat{L}_z] = 0.$$

Exemple :
Pour une particule sans spin, le moment cinétique total s'identifie au moment cinétique orbital. Soit $\widehat{L}^2 = \widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2$ le carré du moment cinétique orbital, $\widehat{L}_x$, $\widehat{L}_y$ et $\widehat{L}_z$ ses composantes suivant les axes des x, des y et des z. Les opérateurs hermitiens $\widehat{L}^2$ et $\widehat{L}_z$ commutent entre eux :

$$[\widehat{L}^2, \widehat{L}_z] = 0.$$

Il s'agit de résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\widehat{L}^2|u\rangle = \ell(\ell+1)|u\rangle$$

$$\widehat{L}_z|u\rangle = m|u\rangle$$

où les $\ell(\ell+1)$ sont les valeurs propres de $\widehat{L}^2$, le nombre quantique *azimutal* ℓ étant un entier tel que $0 \leq \ell \leq n-1$ où n désigne le nombre quantique *principal* associé au hamiltonien du système ; les m sont les valeurs propres de $\widehat{L}_z$, avec $m = -\ell, -\ell+1, ..., \ell-1, \ell$, m étant le nombre quantique *magnétique*.

Ce problème aux valeurs propres consiste à rechercher le sous-espace propre $h^{(\ell,m)}$ commun de $\widehat{L}^2$ et $\widehat{L}_z$ pour les valeurs propres $\ell(\ell+1)$ et m. Wigner et Weyl établissent que ce sous-espace, qui est de dimension $2\ell+1$, s'identifie à l'espace sous-jacent à une représentation irréductible de SO_3 notée $\mathscr{D}_\ell$:

Ce problème aux valeurs propres consiste à rechercher le sous-espace propre $h^{(\ell,m)}$ commun de $\widehat{L}^2$ et $\widehat{L}_z$ pour les valeurs propres $\ell(\ell+1)$ et m. Wigner et Weyl établissent que ce sous-espace, qui est de dimension $2\ell+1$, s'identifie à l'espace sous-jacent à une représentation irréductible de SO_3 notée $\mathscr{D}_\ell$:

- H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, IV, § 1,
- E. Wigner, « Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen », (1927).

Ce problème aux valeurs propres consiste à rechercher le sous-espace propre $h^{(\ell,m)}$ commun de $\widehat{L}^2$ et $\widehat{L}_z$ pour les valeurs propres $\ell(\ell+1)$ et m. Wigner et Weyl établissent que ce sous-espace, qui est de dimension $2\ell+1$, s'identifie à l'espace sous-jacent à une représentation irréductible de SO_3 notée $\mathscr{D}_\ell$:

- H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, IV, § 1,
- E. Wigner, « Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen », (1927).

Effet Zeeman normal : en présence d'un champ magnétique extérieur le long de l'axe des z, le niveau d'énergie E_n se décompose en $2\ell+1$ sous-niveaux séparés par des intervalles égaux.

WEYL : « Perhaps the most important axially symmetric perturbation is that due to a homogeneous magnetic field in the direction of the z-axis (*Zeeman effect*) ; because of this m is called the magnetic quantum number ».

WEYL : « Perhaps the most important axially symmetric perturbation is that due to a homogeneous magnetic field in the direction of the z-axis (*Zeeman effect*) ; because of this m is called the magnetic quantum number ».

Interprété dans le langage des représentations de groupes, l'effet Zeeman normal implique une réduction des symétries du système étudié : on passe de SO_3 à SO_2, i.e. au groupe des rotations autour de l'axe des z.

WEYL : « Perhaps the most important axially symmetric perturbation is that due to a homogeneous magnetic field in the direction of the z-axis (*Zeeman effect*) ; because of this m is called the magnetic quantum number ».

Interprété dans le langage des représentations de groupes, l'effet Zeeman normal implique une réduction des symétries du système étudié : on passe de SO_3 à SO_2, i.e. au groupe des rotations autour de l'axe des z.

La représentation irréductible $\mathscr{D}_\ell$ de SO_3 se décompose en $2\ell+1$ représentations $\mathscr{D}^{(m)}$ de SO_2, avec $m = \ell, \ell-1, \ldots, -\ell$; les représentations $\mathscr{D}^{(m)}$ de SO_2 sont irréductibles et de dimension 1.

WEYL : « Perhaps the most important axially symmetric perturbation is that due to a homogeneous magnetic field in the direction of the z-axis (*Zeeman effect*) ; because of this m is called the magnetic quantum number ».

Interprété dans le langage des représentations de groupes, l'effet Zeeman normal implique une réduction des symétries du système étudié : on passe de SO_3 à SO_2, i.e. au groupe des rotations autour de l'axe des z.

La représentation irréductible $\mathscr{D}_\ell$ de SO_3 se décompose en $2\ell+1$ représentations $\mathscr{D}^{(m)}$ de SO_2, avec $m = \ell, \ell-1, \dots, -\ell$; les représentations $\mathscr{D}^{(m)}$ de SO_2 sont irréductibles et de dimension 1.

Cet exemple montre que WEYL est attentif à certains résultats qualitatifs issus de la spectroscopie.

WEYL et WIGNER étendent de proche en proche la théorie des représentations de groupes. Elle peut s'appliquer

- aux systèmes à une particule avec spin,
- aux systèmes à plusieurs particules « indiscernables » avec spin,
- aux règles de sélection qui déterminent les transitions permises d'un état quantique à un autre.

WEYL et WIGNER étendent de proche en proche la théorie des représentations de groupes. Elle peut s'appliquer

- aux systèmes à une particule avec spin,
- aux systèmes à plusieurs particules « indiscernables » avec spin,
- aux règles de sélection qui déterminent les transitions permises d'un état quantique à un autre.

WEYL s'intéresse également aux représentations du groupe de Lorentz qui interviennent de manière essentielle en mécanique quantique relativiste.

WEYL et WIGNER étendent de proche en proche la théorie des représentations de groupes. Elle peut s'appliquer

- aux systèmes à une particule avec spin,
- aux systèmes à plusieurs particules « indiscernables » avec spin,
- aux règles de sélection qui déterminent les transitions permises d'un état quantique à un autre.

WEYL s'intéresse également aux représentations du groupe de Lorentz qui interviennent de manière essentielle en mécanique quantique relativiste.

Ceci justifie le recours à un tel formalisme : il garantit un traitement UNIFIÉ de divers résultats expérimentaux. Il peut être adapté à des systèmes de COMPLEXITÉ CROISSANTE et à un cadre RELATIVISTE.

I.5. Relativisation des hypothèses de Mackey.

G. W. Mackey, introduction aux articles mathématiques de Wigner :

I.5. Relativisation des hypothèses de Mackey.

G. W. MACKEY, introduction aux articles mathématiques de WIGNER :

« Weyl's idea differed from that of Wigner in that he wanted to apply group representations to get a better understanding of the foundations of quantum mechanics in general and not so much to gain insight into particular problems ».

I.5. Relativisation des hypothèses de Mackey.

G. W. Mackey, introduction aux articles mathématiques de Wigner :

« Weyl's idea differed from that of Wigner in that he wanted to apply group representations to get a better understanding of the foundations of quantum mechanics in general and not so much to gain insight into particular problems ».

« Wigner and Weyl not only introduced group representations into quantum mechanics in quite different ways with different goals but they reached this interaction between physics and mathematics from opposite directions. While Wigner was above all a theoretical physicist, Weyl was a pure mathematician. Moreover while Wigner had to have the existence of the theory of group representations called to his attention by von Neumann, Weyl had been actively working in the field since 1924 ».

Quelques contre-arguments :

- Wigner s'intéresse tout autant aux fondements de la mécanique quantique que Weyl : cf. son article sur les lois de conservation en mécanique quantique,
- Inversement, Weyl se montre attentif aux résultats qualitatifs issus de la spectroscopie : il effectue systématiquement un aller-retour entre données expérimentales et formalisation.

Quelques contre-arguments :

- Wigner s'intéresse tout autant aux fondements de la mécanique quantique que Weyl : cf. son article sur les lois de conservation en mécanique quantique,
- Inversement, Weyl se montre attentif aux résultats qualitatifs issus de la spectroscopie : il effectue systématiquement un aller-retour entre données expérimentales et formalisation.
- Bien que mathématicien de formation, Weyl entend également s'adresser à des physiciens,
- la monographie de Wigner témoigne d'un intérêt pour la théorie des représentations de groupes en elle-même.

Quelques contre-arguments :

- WIGNER s'intéresse tout autant aux fondements de la mécanique quantique que WEYL : cf. son article sur les lois de conservation en mécanique quantique,
- Inversement, WEYL se montre attentif aux résultats qualitatifs issus de la spectroscopie : il effectue systématiquement un aller-retour entre données expérimentales et formalisation.
- Bien que mathématicien de formation, WEYL entend également s'adresser à des physiciens,
- la monographie de WIGNER témoigne d'un intérêt pour la théorie des représentations de groupes en elle-même.

Les différences entre WEYL et WIGNER ne sont pas aussi marquées et elles ne doivent pas oblitérer les points de convergence entre leurs travaux.

Deuxième partie : justifications et réception des travaux de Weyl et Wigner

II.1. Une approche singulière mais des acteurs qui ne sont pas isolés.

Parmi les divers formalismes en mécanique quantique, la mécanique ondulatoire de SCHRÖDINGER jouit d'une réception privilégiée parmi les physiciens. Elle est fondée sur une intuition physique (les ondes de matière) et sur la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Deuxième partie : justifications et réception des travaux de Weyl et Wigner

II.1. Une approche singulière mais des acteurs qui ne sont pas isolés.

Parmi les divers formalismes en mécanique quantique, la mécanique ondulatoire de SCHRÖDINGER jouit d'une réception privilégiée parmi les physiciens. Elle est fondée sur une intuition physique (les ondes de matière) et sur la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires.

- Le formalisme matriciel, explicité par BORN et JORDAN dans « Zur Quantenmechanik I » (1925), est mal connu des physiciens,
- de même que la théorie des groupes de Lie et, *a fortiori*, des représentations de groupes (finis ou continus).

La mathématisation de la mécanique quantique via la théorie des représentations de groupes engage plusieurs acteurs :

(i) Heisenberg : « Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik » (1927) : recours au groupe symétrique pour formaliser des systèmes quantiques comportant plusieurs particules indiscernables.
  - Référence à Serret (1866), i.e. Heisenberg ignore l'existence de traités d'algèbre plus modernes, par ex. le *Lehrbuch der Algebra* de Weber (1894).
  - Impasse sur les représentations du groupe symétrique qui constituent le cadre adéquat pour décrire ces systèmes.

La mathématisation de la mécanique quantique via la théorie des représentations de groupes engage plusieurs acteurs :

(i) HEISENBERG : « Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik » (1927) : recours au groupe symétrique pour formaliser des systèmes quantiques comportant plusieurs particules indiscernables.

- Référence à SERRET (1866), i.e. HEISENBERG ignore l'existence de traités d'algèbre plus modernes, par ex. le *Lehrbuch der Algebra* de WEBER (1894).
- Impasse sur les représentations du groupe symétrique qui constituent le cadre adéquat pour décrire ces systèmes.

(ii) WIGNER et VON NEUMANN. Ce dernier indique à WIGNER les travaux de FROBENIUS sur les représentations du groupe symétrique pour formaliser de manière cohérente les systèmes à n particules indiscernables. Série de travaux en 1927-1928 sur des systèmes de complexité croissante. Sont abordées les représentations de $\mathfrak{S}_n$, SO_3 et SU_2.

(iii) Travaux fondamentaux de HEITLER et LONDON en chimie quantique à partir de 1927. Ils utilisent des méthodes issues de la théorie des groupes dès 1928.

(iii) Travaux fondamentaux de Heitler et London en chimie quantique à partir de 1927. Ils utilisent des méthodes issues de la théorie des groupes dès 1928.

(iv) Motivation de Weyl dès la correspondance avec Born et Jordan (1925) : rendre raison de la relation

$$PQ - QP = \frac{\hbar}{i}\mathbf{1}$$

à partir d'un cadre formel issu de la théorie des groupes et des algèbres de Lie. Article de 1927 : développements sur les représentations projectives de groupes et leurs applications en mécanique quantique.

- Valorisation tardive de cet article avec Mackey notamment.

(iii) Travaux fondamentaux de Heitler et London en chimie quantique à partir de 1927. Ils utilisent des méthodes issues de la théorie des groupes dès 1928.

(iv) Motivation de Weyl dès la correspondance avec Born et Jordan (1925) : rendre raison de la relation

$$PQ - QP = \frac{\hbar}{i}\mathbf{1}$$

à partir d'un cadre formel issu de la théorie des groupes et des algèbres de Lie. Article de 1927 : développements sur les représentations projectives de groupes et leurs applications en mécanique quantique.

- Valorisation tardive de cet article avec Mackey notamment.

v) Travaux de van der Waerden sur les spineurs en 1929. (cf. thèse de Martina Schneider).

Trois monographies sur la théorie des groupes et la mécanique quantique entre 1928 et 1932 :

WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (première éd. 1928, deuxième éd. 1931). Une des premières monographies sur la mécanique quantique. Objectif : montrer la nécessité des représentations de groupes pour garantir sa cohérence à la mécanique quantique.

Trois monographies sur la théorie des groupes et la mécanique quantique entre 1928 et 1932 :

WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (première éd. 1928, deuxième éd. 1931). Une des premières monographies sur la mécanique quantique. Objectif : montrer la nécessité des représentations de groupes pour garantir sa cohérence à la mécanique quantique.

WIGNER, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, (1931).

Trois monographies sur la théorie des groupes et la mécanique quantique entre 1928 et 1932 :

WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (première éd. 1928, deuxième éd. 1931). Une des premières monographies sur la mécanique quantique. Objectif : montrer la nécessité des représentations de groupes pour garantir sa cohérence à la mécanique quantique.

WIGNER, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, (1931).

VAN DER WAERDEN, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, (1932).

Classification des usages de la théorie des groupes et des représentations de groupes en mécanique quantique, d'après M. SCHNEIDER :

(a) explication qualitative des spectres d'atomes et de molécules [HEISENBERG, WIGNER, VON NEUMANN, WEYL, WITMER] ;

(b) fondements de la mécanique quantique [WEYL, WIGNER] ;

Classification des usages de la théorie des groupes et des représentations de groupes en mécanique quantique, d'après M. Schneider :

(a) explication qualitative des spectres d'atomes et de molécules [Heisenberg, Wigner, von Neumann, Weyl, Witmer] ;
(b) fondements de la mécanique quantique [Weyl, Wigner] ;
(c) mécanique quantique relativiste (équation d'onde de Dirac) [von Neumann, Weyl] ;
(d) formation et description de la structure des molécules [Weyl, Heitler, London].

Classification des usages de la théorie des groupes et des représentations de groupes en mécanique quantique, d'après M. Schneider :

(a) explication qualitative des spectres d'atomes et de molécules [Heisenberg, Wigner, von Neumann, Weyl, Witmer] ;
(b) fondements de la mécanique quantique [Weyl, Wigner] ;
(c) mécanique quantique relativiste (équation d'onde de Dirac) [von Neumann, Weyl] ;
(d) formation et description de la structure des molécules [Weyl, Heitler, London].

La monographie de Weyl couvre tous les champs d'application connus de la théorie des groupes à la mécanique quantique.

II.2. Justifications de Weyl et de Wigner en faveur de la théorie des groupes.

L'ouvrage de SPEISER *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (1923) constitue une référence centrale pour WEYL et WIGNER. SPEISER y synthétise

(i) la théorie des groupes finis et de leurs représentations,

(ii) avec des applications remarquables en CRISTALLOGRAPHIE.

II.2. Justifications de Weyl et de Wigner en faveur de la théorie des groupes.

L'ouvrage de SPEISER *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (1923) constitue une référence centrale pour WEYL et WIGNER. SPEISER y synthétise

(i) la théorie des groupes finis et de leurs représentations,

(ii) avec des applications remarquables en CRISTALLOGRAPHIE.

La structure de groupe joue un rôle central en CRISTALLOGRAPHIE. Restriction au groupes de transformations discrets.

II.2. Justifications de Weyl et de Wigner en faveur de la théorie des groupes.

L'ouvrage de Speiser *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (1923) constitue une référence centrale pour Weyl et Wigner. Speiser y synthétise

(i) la théorie des groupes finis et de leurs représentations,

(ii) avec des applications remarquables en cristallographie.

La structure de groupe joue un rôle central en cristallographie. Restriction au groupes de transformations discrets.

Weyl : « The most wonderful symmetrical structures are exhibited in crystals, the symmetry of which is described by those congruency transformations of Euclidean space which bring the atomic lattices of the crystal into coïncidence with themselves. The most important application of group theory to natural science heretofore has been in this field ».

La référence immédiate à Speiser conduit notamment Weyl à sous-évaluer l'importance de la théorie des groupes en relativité restreinte, pourtant mise en exergue par Klein dans « Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe » (1910).

La référence immédiate à Speiser conduit notamment Weyl à sous-évaluer l'importance de la théorie des groupes en relativité restreinte, pourtant mise en exergue par Klein dans « Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe » (1910).

Weyl et Wigner s'appuient sur l'*exemplarité* de la cristallographie pour faire reconnaître par extension l'importance de la théorie des groupes au sens large en mécanique quantique.

La référence immédiate à Speiser conduit notamment Weyl à sous-évaluer l'importance de la théorie des groupes en relativité restreinte, pourtant mise en exergue par Klein dans « Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe » (1910).

Weyl et Wigner s'appuient sur l'*exemplarité* de la cristallographie pour faire reconnaître par extension l'importance de la théorie des groupes au sens large en mécanique quantique.

- Pour Weyl, la théorie des représentations de groupes parachève et unifie la théorie des groupes,
- inversement, tous les aspects connus de cette théorie sont mis à contribution pour mathématiser la mécanique quantique.

WIGNER : « La forme simple qu'admet l'équation différentielle de Schrödinger autorise le recours aux méthodes issues de la théorie des groupes ou, pour être plus précis, de la théorie des représentations [de groupes]. Ces méthodes ont l'avantage suivant : grâce à elles, on obtient quasiment sans faire de calcul des résultats qui sont vérifiés avec exactitude non seulement pour le problème à un corps (l'atome d'hydrogène), mais aussi pour des systèmes aussi compliqués qu'on le veut (...). Il est de la sorte possible d'expliquer tout un pan des expériences qualitatives de la spectroscopie ». [Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen]

Wigner : « La forme simple qu'admet l'équation différentielle de Schrödinger autorise le recours aux méthodes issues de la théorie des groupes ou, pour être plus précis, de la théorie des représentations [de groupes]. Ces méthodes ont l'avantage suivant : grâce à elles, on obtient quasiment sans faire de calcul des résultats qui sont vérifiés avec exactitude non seulement pour le problème à un corps (l'atome d'hydrogène), mais aussi pour des systèmes aussi compliqués qu'on le veut (...). Il est de la sorte possible d'expliquer tout un pan des expériences qualitatives de la spectroscopie ». [Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen]

Wigner justifie l'emploi de ce formalisme en raison de

- sa commodité (économie dans les calculs),
- sa plasticité, puisqu'il peut être adapté à une grande diversité de systèmes.

WIGNER et VON NEUMANN : « Cette méthode [issue de la théorie des groupes] est fondée sur l'utilisation des propriétés élémentaires de symétrie pour tous les systèmes atomiques, à savoir l'identité de tous les électrons et l'équivalence entre toutes les directions de l'espace (cette dernière sera utilisée en priorité) ; elle trouve dans la théorie dite des représentations son outil mathématique adéquat ».[« Zur Erklärung einiger Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons. (Erster Teil) », 1928]

WIGNER et VON NEUMANN : « Cette méthode [issue de la théorie des groupes] est fondée sur l'utilisation des propriétés élémentaires de symétrie pour tous les systèmes atomiques, à savoir l'identité de tous les électrons et l'équivalence entre toutes les directions de l'espace (cette dernière sera utilisée en priorité) ; elle trouve dans la théorie dite des représentations son outil mathématique adéquat ».[« Zur Erklärung einiger Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons. (Erster Teil) », 1928]

- rôle central des symétries pour décrire et saisir les systèmes quantiques,
- parallèle effectué ensuite avec le principe de relativité,
- VON NEUMANN et WIGNER s'intéressent bien aux FONDEMENTS de la mécanique quantique et au rôle que les principes de symétrie sont appelés à jouer à une échelle atomique.

WEYL : « It has recently been recognized that group theory is of fundamental importance for quantum physics ; it here reveals the essential features which are not contingent on a special form of the dynamical laws nor on special assumptions concerning the forces involved. We may well expect that it is just this part of quantum physics which is most certain of a lasting place ».

Weyl : « It has recently been recognized that group theory is of fundamental importance for quantum physics ; it here reveals the essential features which are not contingent on a special form of the dynamical laws nor on special assumptions concerning the forces involved. We may well expect that it is just this part of quantum physics which is most certain of a lasting place ».

- La théorie des groupes permettrait de stabiliser les fondements de la mécanique quantique,
- Bien qu'essentiellement probabiliste, elle dépend de principes de symétrie auxquels Weyl associe nécessité et certitude.

WEYL : « It has recently been recognized that group theory is of fundamental importance for quantum physics ; it here reveals the essential features which are not contingent on a special form of the dynamical laws nor on special assumptions concerning the forces involved. We may well expect that it is just this part of quantum physics which is most certain of a lasting place ».

- La théorie des groupes permettrait de stabiliser les fondements de la mécanique quantique,
- Bien qu'essentiellement probabiliste, elle dépend de principes de symétrie auxquels WEYL associe nécessité et certitude.

Il ne s'agit plus tant de *justifier un formalisme* que de *justifier une théorie physique par un formalisme* qui met en lumière les principes d'invariance auxquels elle est assujettie.

Quatre justifications d'une mathématisation de la mécanique quantique via la théorie des groupes et des représentations de groupes :

- EXEMPLARITÉ de la CRISTALLOGRAPHIE : la théorie des groupes discrets est à la cristallographie ce que la théorie des représentations des groupes finis et des groupes de Lie doit être à la mécanique quantique,

Quatre justifications d'une mathématisation de la mécanique quantique via la théorie des groupes et des représentations de groupes :

- EXEMPLARITÉ de la CRISTALLOGRAPHIE : la théorie des groupes discrets est à la cristallographie ce que la théorie des représentations des groupes finis et des groupes de Lie doit être à la mécanique quantique,
- CLARIFICATION des fondements de la mécanique quantique,

Quatre justifications d'une mathématisation de la mécanique quantique via la théorie des groupes et des représentations de groupes :

- EXEMPLARITÉ de la CRISTALLOGRAPHIE : la théorie des groupes discrets est à la cristallographie ce que la théorie des représentations des groupes finis et des groupes de Lie doit être à la mécanique quantique,
- CLARIFICATION des fondements de la mécanique quantique,
- UNIFICATION des données de la spectroscopie traitées à l'aide d'un même formalisme, quelle que soit la complexité des systèmes étudiés,

Quatre justifications d'une mathématisation de la mécanique quantique via la théorie des groupes et des représentations de groupes :

- EXEMPLARITÉ de la CRISTALLOGRAPHIE : la théorie des groupes discrets est à la cristallographie ce que la théorie des représentations des groupes finis et des groupes de Lie doit être à la mécanique quantique,
- CLARIFICATION des fondements de la mécanique quantique,
- UNIFICATION des données de la spectroscopie traitées à l'aide d'un même formalisme, quelle que soit la complexité des systèmes étudiés,
- garantie d'une assise durable à la mécanique quantique avec la mise au jour de PRINCIPES DE SYMÉTRIE.

Quatre justifications d'une mathématisation de la mécanique quantique via la théorie des groupes et des représentations de groupes :

- EXEMPLARITÉ de la CRISTALLOGRAPHIE : la théorie des groupes discrets est à la cristallographie ce que la théorie des représentations des groupes finis et des groupes de Lie doit être à la mécanique quantique,
- CLARIFICATION des fondements de la mécanique quantique,
- UNIFICATION des données de la spectroscopie traitées à l'aide d'un même formalisme, quelle que soit la complexité des systèmes étudiés,
- garantie d'une assise durable à la mécanique quantique avec la mise au jour de PRINCIPES DE SYMÉTRIE.

Les réflexions épistémologiques de WEYL et WIGNER sur les symétries commencent à se développer avec ce projet de mathématisation de la mécanique quantique.

II.3. Une réception complexe et contrastée entre 1926 et 1931

Réf. Martina SCHNEIDER, Die physikalischen Arbeiten des jungen B. L. van der Waerden (thèse), p. 56 et suiv. : la réception des travaux fondés sur l'usage de la théorie des groupes en mécanique quantique ne se traduit pas par un CLIVAGE entre partisans et détracteurs.

II.3. Une réception complexe et contrastée entre 1926 et 1931

Réf. Martina SCHNEIDER, Die physikalischen Arbeiten des jungen B. L. van der Waerden (thèse), p. 56 et suiv. : la réception des travaux fondés sur l'usage de la théorie des groupes en mécanique quantique ne se traduit pas par un CLIVAGE entre partisans et détracteurs.

Surinterprétation liée à une compréhension littérale de l'expression « Gruppenpest » introduite par EHRENFEST dans une lettre à PAULI fin septembre 1928.

II.3. Une réception complexe et contrastée entre 1926 et 1931

Réf. Martina Schneider, Die physikalischen Arbeiten des jungen B. L. van der Waerden (thèse), p. 56 et suiv. : la réception des travaux fondés sur l'usage de la théorie des groupes en mécanique quantique ne se traduit pas par un clivage entre partisans et détracteurs.

Surinterprétation liée à une compréhension littérale de l'expression « Gruppenpest » introduite par Ehrenfest dans une lettre à Pauli fin septembre 1928.

(i) les premiers travaux de Wigner (1926-1927) semblent encore largement ignorés des physiciens en 1927, malgré une recension dans les *Physikalische Berichte* et le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*

(ii) Dès 1928, on observe une multiplication de travaux qui étendent considérablement le champ d'application de la théorie des groupes (cf. HEITLER et LONDON en chimie quantique). La monographie de WEYL synthétise l'ensemble de ces résultats et elle les porte à la connaissance d'un plus large public.

- les physiciens commencent alors à discuter de la place et des fonctions que l'on doit accorder à ce cadre formel en mécanique quantique : Les justifications en sa faveur sont-elles fondées ? Peut-on en faire l'économie ?

(ii) Dès 1928, on observe une multiplication de travaux qui étendent considérablement le champ d'application de la théorie des groupes (cf. Heitler et London en chimie quantique). La monographie de Weyl synthétise l'ensemble de ces résultats et elle les porte à la connaissance d'un plus large public.

- les physiciens commencent alors à discuter de la place et des fonctions que l'on doit accorder à ce cadre formel en mécanique quantique : Les justifications en sa faveur sont-elles fondées ? Peut-on en faire l'économie ?

Hypothèse de Schneider : cette réception oscille entre intérêt, réserves, scepticisme, circonspection et rejet. Réactions contrastées de la part d'un même acteur en fonction de ses interlocuteurs (ex. Ehrenfest).

(i) HEISENBERG : recension élogieuse de l'ouvrage de WEYL dans la *Deutsche Literaturzeitung* (déc. 1928). HEISENBERG met en avant la clarté du formalisme utilisé et sa nécessité pour avoir un traitement unifié de la mécanique quantique.

(i) HEISENBERG : recension élogieuse de l'ouvrage de WEYL dans la *Deutsche Literaturzeitung* (déc. 1928). HEISENBERG met en avant la clarté du formalisme utilisé et sa nécessité pour avoir un traitement unifié de la mécanique quantique.

(ii) EHRENFEST :

- lettre à KRAMERS (août 1928) ; souhaite comprendre les méthodes issues de la théorie des groupes en mécanique quantique
- correspondance avec PAULI : tonalité plus négative, (parle de "Gruppenpest-Arbeiten" en sep. 1928, estime qu'il s'agit d'un pur artifice formel inutilement compliqué en mai 1929.)

(i) Heisenberg : recension élogieuse de l'ouvrage de Weyl dans la *Deutsche Literaturzeitung* (déc. 1928). Heisenberg met en avant la clarté du formalisme utilisé et sa nécessité pour avoir un traitement unifié de la mécanique quantique.

(ii) Ehrenfest :

- lettre à Kramers (août 1928) ; souhaite comprendre les méthodes issues de la théorie des groupes en mécanique quantique
- correspondance avec Pauli : tonalité plus négative, (parle de "Gruppenpest-Arbeiten" en sep. 1928, estime qu'il s'agit d'un pur artifice formel inutilement compliqué en mai 1929.)

(iii) Sommerfeld : lettre de remerciements à Weyl (déc. 1928). Avoue ne rien connaître à la théorie des groupes et juge les méthodes qui en dérivent abstraites.

(iv) SCHRÖDINGER : lettre à WEYL (sep. 1929). Demande aux mathématiciens de s'exprimer plus simplement et estime que les fondements de la mécanique quantique méritent d'être clarifiés au lieu d'être recouverts d'un appareillage formel trop technique.

(iv) Schrödinger : lettre à Weyl (sep. 1929). Demande aux mathématiciens de s'exprimer plus simplement et estime que les fondements de la mécanique quantique méritent d'être clarifiés au lieu d'être recouverts d'un appareillage formel trop technique.

(v) Slater : les méthodes issues de la théorie des groupes ne seraient qu'un effet de mode. Ce cadre formel ne permet pas de tirer de conséquences nouvelles sur un plan empirique. Slater propose une alternative pour mathématiser la mécanique quantique sans recourir à la théorie des groupes.

(iv) Schrödinger : lettre à Weyl (sep. 1929). Demande aux mathématiciens de s'exprimer plus simplement et estime que les fondements de la mécanique quantique méritent d'être clarifiés au lieu d'être recouverts d'un appareillage formel trop technique.

(v) Slater : les méthodes issues de la théorie des groupes ne seraient qu'un effet de mode. Ce cadre formel ne permet pas de tirer de conséquences nouvelles sur un plan empirique. Slater propose une alternative pour mathématiser la mécanique quantique sans recourir à la théorie des groupes.

(vi) Réaction comparable de la part de Born : franche hostilité contre de telles méthodes.

Un exemple montrant l'effectivité à long terme de la théorie des représentations de groupes dans l'étude de particules en physique subatomique : le « eightfold way » [Ne'eman et Gell-Mann entre 1960-1962]

Un exemple montrant l'effectivité à long terme de la théorie des représentations de groupes dans l'étude de particules en physique subatomique : le « eightfold way » [Ne'eman et Gell-Mann entre 1960-1962]

Il s'agit de classer *a priori* certaines particules, essentiellement l'octet des mésons et l'octet des baryons (mésons et baryons sont des hadrons, i.e. ils sont sensibles aux interactions fortes), en s'appuyant sur l'étude de certaines représentations *irréductibles* du groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(3)$, i.e. du groupe des matrices 3×3 à coefficients complexes unitaires de déterminant 1.

Un exemple montrant l'effectivité à long terme de la théorie des représentations de groupes dans l'étude de particules en physique subatomique : le « eightfold way » [NE'EMAN et GELL-MANN entre 1960-1962]

Il s'agit de classer *a priori* certaines particules, essentiellement l'octet des MÉSONS et l'octet des BARYONS (mésons et baryons sont des hadrons, i.e. ils sont sensibles aux interactions fortes), en s'appuyant sur l'étude de certaines représentations *irréductibles* du groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(3)$, i.e. du groupe des matrices 3×3 à coefficients complexes unitaires de déterminant 1.

NE'EMAN et GELL-MANN parviennent à une détermination exhaustive des familles de mésons et de hadrons à partir de l'étude de certaines *symétries internes*. Ils prédisent ainsi l'existence d'un huitième méson, ce qui sera confirmé empiriquement après-coup.

(i) les représentations irréductibles de SU_3 sont en bijection avec les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(3)$, car $\mathrm{SU}(3)$ est *connexe* et *simplement connexe*.

- Ce résultat est établi par WEYL pour $\mathrm{SU}(n)$ en général avec $n \geq 2$ en 1925.

(i) les représentations irréductibles de SU_3 sont en bijection avec les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(3)$, car $\mathrm{SU}(3)$ est *connexe* et *simplement connexe*.
  - Ce résultat est établi par Weyl pour $\mathrm{SU}(n)$ en général avec $n \geq 2$ en 1925.

(ii) Il y a une bijection entre les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(3)$ et de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ — par complexification et, inversement, par restriction.

(i) les représentations irréductibles de SU_3 sont en bijection avec les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(3)$, car $\mathrm{SU}(3)$ est *connexe* et *simplement connexe*.
   - Ce résultat est établi par WEYL pour $\mathrm{SU}(n)$ en général avec $n \geq 2$ en 1925.

(ii) Il y a une bijection entre les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(3)$ et de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ — par complexification et, inversement, par restriction.

Il revient donc au même d'étudier les représentations de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Techniquement, les octets des baryons et des mésons s'ordonnent en fonction du diagramme des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. (réf. à la théorie des poids de CARTAN (1913) poursuivie par WEYL en 1925 pour classer les représentations irréductibles des algèbres de Lie)

Troisième partie / conclusion : statut et fonctions des principes d'invariance en physique

WEYL et WIGNER développent une réflexion plus générale sur le statut et les fonctions des principes d'invariance en physique.

Troisième partie / conclusion : statut et fonctions des principes d'invariance en physique

WEYL et WIGNER développent une réflexion plus générale sur le statut et les fonctions des principes d'invariance en physique.

III.1. Symétries et lois de la nature

Argument fondamental de WIGNER : "laws of nature could not exist without principles of invariance". Une loi de la nature se caractérise moins par son "universalité" et sa "nécessité" que par l'invariance formelle des relations qu'elle met en jeu sous l'action d'un groupe de transformations.

Troisième partie / conclusion : statut et fonctions des principes d'invariance en physique

WEYL et WIGNER développent une réflexion plus générale sur le statut et les fonctions des principes d'invariance en physique.

III.1. Symétries et lois de la nature

Argument fondamental de WIGNER : "laws of nature could not exist without principles of invariance". Une loi de la nature se caractérise moins par son "universalité" et sa "nécessité" que par l'invariance formelle des relations qu'elle met en jeu sous l'action d'un groupe de transformations.

Exemples par excellence :

- le principe de relativité galiléen (les lois de la mécanique classique sont formellement invariantes sous l'action du groupe de Galilée)
- le principe de relativité einsteinien (les lois de la nature sont formellement invariantes sous l'action du groupe de Lorentz).

Les théorèmes de Noether montrent l'importance des SYMÉTRIES pour déduire des LOIS DE CONSERVATION dans une diversité de théories physiques (par ex. le premier théorème de Noether s'applique à la mécanique classique et à la relativité restreinte, le second théorème à la relativité générale et aux théories de jauge, dont celle de WEYL de 1918).

Les théorèmes de Noether montrent l'importance des SYMÉTRIES pour déduire des LOIS DE CONSERVATION dans une diversité de théories physiques (par ex. le premier théorème de Noether s'applique à la mécanique classique et à la relativité restreinte, le second théorème à la relativité générale et aux théories de jauge, dont celle de WEYL de 1918).

Les principes d'invariance président à la détermination des lois de la nature. Ils sont CONTRAIGNANTS et ils permettent de sélectionner parmi certaines relations librement créées par l'esprit, celles qui sont susceptibles de devenir des lois de la nature.

Les théorèmes de Noether montrent l'importance des SYMÉTRIES pour déduire des LOIS DE CONSERVATION dans une diversité de théories physiques (par ex. le premier théorème de Noether s'applique à la mécanique classique et à la relativité restreinte, le second théorème à la relativité générale et aux théories de jauge, dont celle de WEYL de 1918).

Les principes d'invariance président à la détermination des lois de la nature. Ils sont CONTRAIGNANTS et ils permettent de sélectionner parmi certaines relations librement créées par l'esprit, celles qui sont susceptibles de devenir des lois de la nature.

Cette fonction contraignante des principes d'invariance est soulignée par WEYL : « It is quite evident from the liberty of mind, that in its constructions some arbitrariness is necessarily inbuilt ; this can, however, afterwards be compensated for by the principle of invariance ».

En relativité restreinte, l'invariance de Lorentz a une fonction

(i) heuristique puisqu'elle oriente la formulation et la sélection d'énoncés candidats au statut de lois de la nature,

(ii) unificatrice au sens où toutes les lois de la nature doivent être assujetties à elle.

En relativité restreinte, l'invariance de Lorentz a une fonction

(i) heuristique puisqu'elle oriente la formulation et la sélection d'énoncés candidats au statut de lois de la nature,

(ii) unificatrice au sens où toutes les lois de la nature doivent être assujetties à elle.

Par ex. les lois de la mécanique classique ne sont pas invariantes de Lorentz. Il s'agit de reformuler les lois de la mécanique pour qu'elles le deviennent. En relativité restreinte, les lois de la mécanique et de l'électromagnétisme sont assujetties aux deux "principes" formulés par EINSTEIN : principe de relativité et existence d'une vitesse limite.

En relativité restreinte, l'invariance de Lorentz a une fonction

(i) heuristique puisqu'elle oriente la formulation et la sélection d'énoncés candidats au statut de lois de la nature,

(ii) unificatrice au sens où toutes les lois de la nature doivent être assujetties à elle.

Par ex. les lois de la mécanique classique ne sont pas invariantes de Lorentz. Il s'agit de reformuler les lois de la mécanique pour qu'elles le deviennent. En relativité restreinte, les lois de la mécanique et de l'électromagnétisme sont assujetties aux deux "principes" formulés par EINSTEIN : principe de relativité et existence d'une vitesse limite.

La GÉNÉRALISATION du principe de relativité à toutes les lois de la nature est corrélée à une UNIFICATION de la mécanique et de l'électromagnétisme.

Pour Wigner, « L' électrodynamique des corps en mouvement » d'Einstein (1905) marque un tournant dans le rapport entre principes d'invariance et lois de la nature :

Pour WIGNER, « L' électrodynamique des corps en mouvement » d'EINSTEIN (1905) marque un tournant dans le rapport entre principes d'invariance et lois de la nature :

« His papers on special relativity also mark the reversal of a trend : until then, the principles of invariance were derived from the laws of motion. (...) It is now natural for us to try to derive laws of nature and to test their validity by means of the laws of invariance, rather than to derive the laws of invariance from what we believe to be the laws of nature ».

Pour WIGNER, « L' électrodynamique des corps en mouvement » d'EINSTEIN (1905) marque un tournant dans le rapport entre principes d'invariance et lois de la nature :

« His papers on special relativity also mark the reversal of a trend : until then, the principles of invariance were derived from the laws of motion. (...) It is now natural for us to try to derive laws of nature and to test their validity by means of the laws of invariance, rather than to derive the laws of invariance from what we believe to be the laws of nature ».

Il ne s'agit donc plus de constater après-coup que certaines lois de la nature satisfont à des principes d'invariance, mais bien de déduire des lois de la nature à partir de principes d'invariance formulés *a priori* (approche DÉDUCTIVISTE dans la construction d'une théorie physique).

WIGNER décrit les théories physiques à partir d'une hiérarchie entre

- événements,
- lois de la nature,
- principes d'invariance.

WIGNER décrit les théories physiques à partir d'une hiérarchie entre

- événements,
- lois de la nature,
- principes d'invariance.

« the invariance principles [are] rigorous correlations between those correlations between events which are postulated by the laws of nature. This at once points to the use of the set of invariance principles which is surely most important at present : to be touchstones for the validity of possible laws of nature. A law of nature can be accepted as valid only if the correlations which it postulates are consistent with the accepted invariance principles ».

WIGNER décrit les théories physiques à partir d'une hiérarchie entre

- événements,
- lois de la nature,
- principes d'invariance.

« the invariance principles [are] rigorous correlations between those correlations between events which are postulated by the laws of nature. This at once points to the use of the set of invariance principles which is surely most important at present : to be touchstones for the validity of possible laws of nature. A law of nature can be accepted as valid only if the correlations which it postulates are consistent with the accepted invariance principles ».

Rôle constitutif des principes d'invariance dans l'élaboration d'une théorie physique. Il ne s'agit pas d'un simple habillage formel dans le langage de la théorie des groupes.

III.2. Vers une classification des symétries

(i) On distingue les SYMÉTRIES DISCRÈTES et les SYMÉTRIES CONTINUES, suivant que le groupe qui les définit est discret (fini ou infini) ou continu.

- ex. de symétries discrètes avec les travaux remarquables de FEDOROV et SCHÖNFLIES en CRISTALLOGRAPHIE consacrés à la classification des 230 groupes d'espace,

III.2. Vers une classification des symétries

(i) On distingue les SYMÉTRIES DISCRÈTES et les SYMÉTRIES CONTINUES, suivant que le groupe qui les définit est discret (fini ou infini) ou continu.

- ex. de symétries discrètes avec les travaux remarquables de FEDOROV et SCHÖNFLIES en CRISTALLOGRAPHIE consacrés à la classification des 230 groupes d'espace,

(ii) On distinguer les SYMÉTRIES GLOBALES et les SYMÉTRIES LOCALES qui entrent en jeu lorsque les paramètres qui les définissent dépendent de la position dans l'espace-temps.

- ex de symétries locales avec la relativité générale, WIGNER : « the new principle of invariance which the general theory of relativity substitutes for the older ones is that all actions are transmitted by fields which transmit the perturbations from point to point ».

(iii) On distingue les SYMÉTRIES "UNIVERSELLES" qui décrivent des changements de référentiels et les SYMÉTRIES INTERNES qui se rapportent à certains systèmes physiques,

- Le principe de relativité einsteinien met en jeu des symétries universelles (TOUS les référentiels inertiels en repos ou en mouvement de translation uniforme sont équivalents pour la formulation des lois de la nature),
- le « eightfold way » décrit des symétries internes pour des particules sensibles aux interactions fortes.

(iii) On distingue les SYMÉTRIES "UNIVERSELLES" qui décrivent des changements de référentiels et les SYMÉTRIES INTERNES qui se rapportent à certains systèmes physiques,

- Le principe de relativité einsteinien met en jeu des symétries universelles (TOUS les référentiels inertiels en repos ou en mouvement de translation uniforme sont équivalents pour la formulation des lois de la nature),
- le « eightfold way » décrit des symétries internes pour des particules sensibles aux interactions fortes.

(iv) On distingue les SYMÉTRIES GÉOMÉTRIQUES qui dérivent des propriétés d'espace-temps et les SYMÉTRIES DYNAMIQUES relatives aux types d'interactions dont on veut rendre raison.

(iii) On distingue les SYMÉTRIES "UNIVERSELLES" qui décrivent des changements de référentiels et les SYMÉTRIES INTERNES qui se rapportent à certains systèmes physiques,

- Le principe de relativité einsteinien met en jeu des symétries universelles (TOUS les référentiels inertiels en repos ou en mouvement de translation uniforme sont équivalents pour la formulation des lois de la nature),
- le « eightfold way » décrit des symétries internes pour des particules sensibles aux interactions fortes.

(iv) On distingue les SYMÉTRIES GÉOMÉTRIQUES qui dérivent des propriétés d'espace-temps et les SYMÉTRIES DYNAMIQUES relatives aux types d'interactions dont on veut rendre raison.

- Exemple problématique en relativité générale, WIGNER : « The reason that I did not speak about the invariance with respect to the general coordinate transformations of the general theory of relativity is that I believe that the underlying invariance is not geometric but dynamic ». WIGNER se conforme ici aux thèses de FOCK.

WIGNER interprète le principe de relativité (relat. restreinte) comme un principe d'invariance *géométrique*. Nous avons souligné ses fonctions unificatrices.

WIGNER interprète le principe de relativité (relat. restreinte) comme un principe d'invariance *géométrique*. Nous avons souligné ses fonctions unificatrices.

En revanche, WIGNER souligne le caractère SPÉCIFIQUE des principes d'invariance dynamiques :

- existence de types spécifiques d'interactions (gravitationnelle, électromagnétique, forte, faible)
- qui sont décrites à partir de groupes de symétrie spécifiques,

WIGNER interprète le principe de relativité (relat. restreinte) comme un principe d'invariance *géométrique*. Nous avons souligné ses fonctions unificatrices.

En revanche, WIGNER souligne le caractère SPÉCIFIQUE des principes d'invariance dynamiques :

- existence de types spécifiques d'interactions (gravitationnelle, électromagnétique, forte, faible)
- qui sont décrites à partir de groupes de symétrie spécifiques,

ce qui rend problématique la construction d'une théorie unificatrice : « The emergence of specific types of interactions as separate and well distinguishable entities is one of the most striking results of the last decade. (...) It is equally striking that each of them is invariant under a specific group ».

WIGNER mesure avec du recul les vertus heuristiques et programmatiques de la théorie des groupes et des représentations de groupes en physique. Référence à

- la seconde théorie de jauge de FOCK-LONDON-WEYL (1926-1929) en lien avec la conservation de la charge électrique,

WIGNER mesure avec du recul les vertus heuristiques et programmatiques de la théorie des groupes et des représentations de groupes en physique. Référence à

- la seconde théorie de jauge de FOCK-LONDON-WEYL (1926-1929) en lien avec la conservation de la charge électrique,
- aux travaux de YANG et MILLS de 1954 qui marquent l'avènement des théories de jauge non abéliennes, i.e. fondées sur un groupe de jauge non commutatif,

WIGNER mesure avec du recul les vertus heuristiques et programmatiques de la théorie des groupes et des représentations de groupes en physique. Référence à

- la seconde théorie de jauge de FOCK-LONDON-WEYL (1926-1929) en lien avec la conservation de la charge électrique,
- aux travaux de YANG et MILLS de 1954 qui marquent l'avènement des théories de jauge non abéliennes, i.e. fondées sur un groupe de jauge non commutatif,
- au « eightfold way » de NE'EMAN et GELL-MANN qui est centré sur les interactions fortes et qui, mathématiquement, se fonde sur l'étude des représentations irréductibles de $\mathrm{SU}(3)$.

WIGNER mesure avec du recul les vertus heuristiques et programmatiques de la théorie des groupes et des représentations de groupes en physique. Référence à

- la seconde théorie de jauge de FOCK-LONDON-WEYL (1926-1929) en lien avec la conservation de la charge électrique,
- aux travaux de YANG et MILLS de 1954 qui marquent l'avènement des théories de jauge non abéliennes, i.e. fondées sur un groupe de jauge non commutatif,
- au « eightfold way » de NE'EMAN et GELL-MANN qui est centré sur les interactions fortes et qui, mathématiquement, se fonde sur l'étude des représentations irréductibles de SU(3).

Dans sa conférence de 1951, WEYL fait état de la transversalité de l'idée de symétrie en physique. Il montre à la suite de SPEISER qu'elle s'applique de manière remarquable aux arts. Les symétries constituent un point de contact essentiel entre ARTS et SCIENCES.

III.3. Différences de perspective entre Wigner et van Fraassen

III.3. Différences de perspective entre Wigner et van Fraassen

Réf. *Lois et symétries* de B. van Fraassen : analyse critique de l'usage du concept de loi de la nature pour décrire des théories physiques. van Fraassen suggère de substituer les symétries aux lois. Référence à la pratique des physiciens.

III.3. Différences de perspective entre Wigner et van Fraassen

Réf. *Lois et symétries* de B. van Fraassen : analyse critique de l'usage du concept de loi de la nature pour décrire des théories physiques. van Fraassen suggère de substituer les symétries aux lois. Référence à la pratique des physiciens.

« Quand les philosophes traitent des lois de la nature, ils en parlent en termes d'universalité et de nécessité. La science utilise aussi le terme de lois dans certaines expressions comme "la loi d'Ohm" ou "la loi de la conservation de l'énergie", ou dans certaines classifications génériques comme les "lois du mouvement", les "lois de conservation". Mais au lieu de parler des lois en termes d'universalité et de nécessité, les scientifiques en parlent en termes de symétries, de transformations et d'invariance. Il suffit d'ouvrir une revue de physique : on y lira que tel résultat a été obtenu par raisons de symétrie — mais jamais qu'il a été obtenu par raisons d'universalité et de nécessité ».[van Fraassen, introduction]

Cette tentative de substitution est motivée par des réflexions sur le statut de la généralité en physique. Pour VAN FRAASSEN la généralité en physique n'est pas fondée sur le concept philosophique d'*universalité*, mais sur le concept mathématique d'*invariance* :

- une relation entre des événements est générale parce qu'elle demeure formellement invariante sous l'action d'un certain groupe de transformations.

Cette tentative de substitution est motivée par des réflexions sur le statut de la généralité en physique. Pour van Fraassen la généralité en physique n'est pas fondée sur le concept philosophique d'*universalité*, mais sur le concept mathématique d'*invariance* :

- une relation entre des événements est générale parce qu'elle demeure formellement invariante sous l'action d'un certain groupe de transformations.

On ne trouve pas l'idée d'une substitution des symétries aux lois chez Wigner : lois de la nature et principes d'invariance ne se situent pas au même niveau et ne sont donc pas mutuellement substituables.

- Les symétries permettent d'identifier et de construire des lois de la nature.
- Inversement, les lois de la nature déterminent les relations auxquelles s'appliquent les symétries en physique.
- Principes d'invariance et lois de la nature sont donc des termes corrélatifs chez Wigner.